

Г. А. ПОПОВ

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЗНАЧЕНИЙ АДДИТИВНОЙ ФУНКЦИИ НА ПРОГРЕССИИ

(Представлено академиком Ю. В. Линником 9 III 1971)

В настоящей заметке, используя идеи работы (1), удается получить следующий результат.

Теорема. Пусть $g(n)$ — вещественная аддитивная функция, l и k — фиксированные натуральные числа, причем $(l, k) = 1$.

Для существования предельного распределения

$$F_{l, k}(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{k}{N} \sum_{\substack{n \leq N \\ g(n) - A_N \leq x \\ n \equiv l(k)}} 1 \quad (1)$$

необходимо и достаточно, чтобы оно существовало на всем натуральном ряде, т. е. существовала функция распределения $F(x)$ такая, что

$$F(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{\substack{n \leq N \\ g(n) - A_N \leq x}} 1.$$

В (1) было доказано, что для существования предельного распределения $g(n) - A_N$ необходимо и достаточно, чтобы сходил ряд

$$\sum_p \frac{\|g(p) - b \log p\|^2}{p}, \quad (2)$$

где

$$\|u\| = \begin{cases} u, & \text{если } |u| < 1, \\ 1, & \text{если } u \geq 1, \\ -1, & \text{если } u \leq -1. \end{cases}$$

Теорема будет доказана, если мы установим, что это же условие является необходимым и достаточным условием существования распределения на прогрессии.

Доказательство. Необходимость. Введем обозначения:

$$s = \sigma_N + it, \quad \sigma_N = 1 + 1/\log N, \quad m = \varphi(k) - 1, \quad F_\chi(s) = \sum_n \frac{\chi(n) e^{i\xi g(n)}}{n^s},$$

$$S_\chi(N, t) = \sum_{p \geq 3} \frac{1 - \operatorname{Re} \chi(p) \exp\left(i\xi \left(g(p) - \frac{t}{\xi} \log p\right)\right)}{p},$$

$$M_N(\xi, \chi) = \sum_{p \leq N} \frac{1 - \operatorname{Re} \chi(p) \exp(i\xi (g(p) - b \log p))}{p}.$$

(1) на языке характеристических функций означает, что

$$\tau_N(\xi) = \frac{k}{\varphi(k)N} e^{-i\xi A_N} \sum_x \bar{\chi}(l) \sum_{n \leq N} \chi(n) e^{i\xi g(n)} = \tau(\xi) + o(1). \quad (3)$$

Рассмотрим ряд

$$F(s) = \frac{k}{\varphi(k)} \sum_{\chi_i} \bar{\chi}_i(l) F_{\chi_i}(s), \quad i = 0, 1, \dots, m.$$

Наша основная цель показать, что существует интервал $|\xi| \leq \xi_0$ такой, что

$$F(s) = \frac{k}{\varphi(k)} F_{\chi_0}(s) + o\left(\frac{1}{\sigma_N - 1}\right), \quad N \rightarrow \infty,$$

равномерно по t в любой области $|t| \leq k$. Тогда по теореме 1 работы (1) получим

$$\tau_N(\xi) = \frac{k}{\varphi(k)N} e^{-i\xi A_N} \sum_{n \leq N} \chi_0(n) e^{i\xi g(n)} = \tau(\xi) + o(1). \quad (4)$$

Перейдем к доказательству этого факта. Пользуясь мультипликативностью коэффициентов ряда $F_{\chi_i}(s)$, нетрудно получить

$$\frac{1}{\xi(\sigma_N)} |F_{\chi_i}(s)| = 2 \left(1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\chi_i(2^r) e^{i\xi g(2^r)}}{2^{rs}} \right) \exp[S_{\chi_i}(N, t) + \psi_i(s)], \quad (5)$$

где $\psi_i(s)$ — равномерно ограничена по ξ и t при $N \rightarrow \infty$.

Имеет место следующая альтернатива: или

- 1) $S_{\chi_i}(N, t) \rightarrow +\infty$ при $N \rightarrow \infty$ одновременно для всех $i = 0, 1, \dots, m$ при любом фиксированном t ; или
- 2) для некоторого χ_i существует $t(\xi)$ такое, что

$$S_{\chi_i}(N, t(\xi)) \rightarrow a \neq +\infty \text{ при } N \rightarrow \infty.$$

Так как $\tau(0) = 1$ и $\tau(\xi)$ — непрерывная функция, то, следовательно, существует интервал $|\xi| \leq \xi_0$, где $\tau(\xi) \neq 0$. Пользуясь (5) и теоремой 1 работы (1), убеждаемся в том, что случай 1 альтернативы быть не может. Так как в этом случае $F_{\chi_i}(s) = o(1/(\sigma_N - 1))$ равномерно по t в любой полосе $|t| \leq k$. Заметим, что если существует $t(\xi)$ такое, что имеет место $S_{\chi_i}(N, t(\xi)) \rightarrow a \neq +\infty$ при $N \rightarrow \infty$, то в этом случае все $S_{\chi_l}(N, t) \rightarrow +\infty$ при любом t и $N \rightarrow \infty$ для всех $l \neq i$. Действительно,

$$S_{\chi_l}(N, t) \geq \sum_{p \geq 3} \frac{1 - \operatorname{Re} \chi_l(p) \exp(i\xi(g(p) - t/\xi))}{p^{\sigma_N}} = \sum_{p \geq 3} \frac{1}{p^{\sigma_N}} - \operatorname{Re} \left[\sum_{p \geq 3} \frac{\chi_k(p)}{p^{\sigma_N + i(t - t(\xi))}} - \sum_{p \geq 3} \frac{\chi_k(p) - \chi_l(p) \exp(i\xi(g(p) - \frac{t(\xi)}{\xi} \log p))}{p^{\sigma_N + i(t - t(\xi))}} \right],$$

где $\chi_i(p) = \chi_i(p) \chi_k^{-1}(p)$.

$$S_{\chi_l}(N, t) \geq \sum_{p \geq 3} \frac{1}{p^{\sigma_N}} - |\operatorname{Re}[\Sigma_1 - \Sigma_2]| \geq \frac{1}{2} \log \frac{1}{\sigma_N - 1},$$

так как $\Sigma_1 = O(1)$, $\Sigma_2 = O\left(\sqrt{\log \frac{1}{\sigma_N - 1}}\right)$.

Следовательно, для всех $i \neq l$ $F_{\chi_l}(s) = o(1/(\sigma_N - 1))$ и по теореме 1 работы (1)

$$\tau_N(\xi) = \frac{k}{\varphi(k)N} e^{-i\xi A_N} \sum_{n \leq N} \bar{\chi}_i(l) \chi_i(n) e^{i\xi g(n)} = \tau(\xi) + o(1).$$

Легко доказать, что если $S_{\chi_i}(N, t(\xi)) \rightarrow a \neq +\infty$ при $N \rightarrow \infty$, то сходится ряд

$$\sum_p \frac{1 - \operatorname{Re} \chi(p) \exp \left(i \xi \left(g(p) - \frac{t(\xi)}{\xi} \log p \right) \right)}{p}.$$

Пользуясь леммой 1 работы (1), нетрудно получить, что $t(\xi) = b\xi$ для всех ξ , $\xi \in [-\xi_0, \xi_0]$. Покажем, что существует интервал $|\xi| \leq \xi_1$ такой, что для всех ξ , $\xi \in [-\xi_1, \xi_1]$, имеет место $S_{\xi_0}(N, \xi b) \rightarrow a \neq +\infty$. Действительно, обозначим через $\mathfrak{M}$ множество таких ξ , для которых ряд

$$\sum_p \frac{1 - \operatorname{Re} \chi_i(p) \exp(i\xi(g(p) - b \log p))}{p} < +\infty, \quad i \neq 0.$$

Покажем, что если $\xi \in \mathfrak{M}$, то оно не принадлежит интервалу $|\xi| < \xi_1$ для некоторого ξ_1 . Тем самым мы докажем, что существует окрестность точки $\xi = 0$ такая, где сходится только ряд

$$\sum_p \frac{1 - \operatorname{Re} \chi_0(p) \exp(i\xi(g(p) - b \log p))}{p}.$$

Доказательство этого факта будем вести от противного. Пусть $\xi = 0$ является предельной точкой для множества $\mathfrak{M}$. Докажем, что существует окрестность $\xi = 0$, где $M_N(\xi, \chi_i)$ равномерно по ξ , $\xi \in \mathfrak{M}$, неограничена при $N \rightarrow \infty$. Предположим, что это не так. Тогда для любого m_0 существуют окрестность $|\xi_{m_0}| \leq 1/m_0$, $\xi_{m_0} \in \mathfrak{M}$, N_{m_0} такие, что

$$M_{N_{m_0}}(\xi_{m_0}, \chi_i) > 2^{m_0}, \quad M_N(\xi_{m_0}, \chi_i) \geq M_{N_{m_0}}(\xi_{m_0}, \chi_i),$$

если $N > N_{m_0}$. Предыдущие рассуждения и лемма 1 работы (1) дают

$$|\tau_N(\xi_{m_0})| = \frac{1}{|1 + i\xi_{m_0}b|} \exp[-M_N(\xi_{m_0}, \chi_i) + g(\xi_{m_0})] < c \exp(-2^{m_0})$$

для всех $N > N_{m_0}$. С другой стороны, $|\tau(\xi)| > 1/2$, если $|\xi| \leq \xi_2$, где $\xi_2 < \xi_1$. А так как $\tau_N(\xi) \rightarrow \tau(\xi)$, то получаем противоречие. Но $M_N(\xi, \chi_i)$ также и не является равномерно ограниченной по N и ξ . Действительно,

$$M_N(\xi, \chi_i) > \sum_{\substack{a \leq p \leq N \\ p \equiv l(k)}} \frac{1 - \cos[\xi(g(p) - b \log p) + a]}{p},$$

$a(p) = a \neq 0$, так как $\chi_i(p)$ — неглавный характер. Последняя сумма при $\xi \rightarrow 0$, $\xi \in \mathfrak{M}$, $N \rightarrow \infty$ стремится к бесконечности. Таким образом, мы доказали, что существует $|\xi| \leq \xi_1$ такой, где сходится ряд

$$\sum_{p \geq 3} \frac{1 - \operatorname{Re} \chi_0(p) \exp(i\xi(g(p) - b \log p))}{p}.$$

Пользуясь леммой 1 работы (1), имеем тогда

$$\begin{aligned} \tau_N(\xi) &= \frac{1}{1 + i\xi b} \prod_{\substack{p \leq N \\ p \nmid k}} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \left(1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\exp(i\xi(g(p^r) - b \log p^r))}{p^r}\right) \times \\ &\quad \times \exp(-i\xi A_N + i\xi b \log N). \end{aligned} \quad (6)$$

(знак χ означает, что p не делит k). Повторяя далее соответствующие рассуждения из доказательства теоремы 4 работы (1) получаем утверждение необходимости.

Достаточность. Из сходимости ряда $\sum_p \frac{\|g(p) - b \log p\|^2}{p}$ следует сходимость ряда $\sum_p \frac{1 - \operatorname{Re} \chi_0(p) \exp(i\xi(g(p) - b \log p))}{p}$, а тогда $S_{\chi_0}(N, \xi b) \rightarrow a \neq +\infty$ при $N \rightarrow \infty$. Соответствующие рассуждения, приведенные в доказательстве необходимости, и лемма 1 работы (1) нам дают

$$\tau_N(\xi) = \frac{1}{1 + i\xi b} \left(1 - \frac{\chi_0(2)}{2} \right) \left(1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\chi_0(2^r) \exp(i\xi(g(2^r) - b \log 2^r))}{2^r} \right) \times \\ \times \exp \left[- \sum_{\substack{p \leq N \\ p \nmid k}} \frac{\exp(i\xi(g(p) - b \log p))}{p} + (H_1(1 + i\xi b) - H_2(1)) + \right. \\ \left. + i\xi(b \log N - A_N) \right].$$

Далее дословно повторяя соответствующие рассуждения доказательства теоремы 4 из (1), получаем утверждение теоремы.

В заключение автор выражает благодарность проф. Б. В. Левину за постановку задачи и помощь в работе.

Владимирский педагогический институт
им. П. И. Лебедева-Полянского

Поступило
19 II 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ Б. В. Левин, Н. М. Тимофеев, Уч. зап. Владимирск. гос. пед. инст., сер. Математика, в. 2 (1971).