К Р И С Т А Л Л О Г Р А Ф И Я

Том 21 1976 Вып. 2

УДК 548.0:538.566

Б. В. БОКУТЬ, С. С. ГИРГЕЛЬ

ПОЛЯРИЗАЦИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В ПРОЗРАЧНЫХ МАГНИТОУПОРЯДОЧЕННЫХ КРИСТАЛЛАХ

Проведено рассмотрение задачи о поляризации плоских электромагнитных волн в прозрачных магнитоупорядоченных кристаллах с одновременным учетом линейного и квадратичного магнитооптических эффектов с помощью инвариантного метода. Получены выражения для векторов **E**, **D**, **H** для произвольных направлений распространения волны.

Для кубических ферримагнетиков найдены направления индуцированных оптических осей для случаев произвольного направления намагниченности в плоскостях симметрии кристалла. Определены условия, когда кристалл под действием магнитного упорядочения становится одноосным либо остается изотропным (по двупреломлению). Показано, что кубический кристалл может быть одноосным при любом направлении намагниченности в плоскостях симметрии.

Особенности проявления гиротропии магнитоупорядоченных кристаллов для ряда частных случаев ориентации вектора намагниченности и волновой нормали плоских электромагнитных волн исследовались в [1–3]. Однако в этих работах не учитывался квадратичный магнитооптический эффект, хотя, как показали экспериментальные исследования [4, 5], в магнитных кристаллах, в частности, в ферритах-гранатах, эффект Коттона-Мутона по порядку величины сравним с фарадеевским вращением. Одновременный учет линейного и квадратичного магнитооптических эффектов в магнитоупорядоченных кристаллах проводился в [6–10] также только для некоторых простых случаев.

Настоящее сообщение посвящено решению общей задачи о поляризации электромагнитных волн в прозрачных магнитоупорядоченных кристаллах с учетом линейного и квадратичного магнитооптических эффектов.

Будем исходить из материального уравнения

$$\mathbf{E}=\varepsilon^{-1}\mathbf{D} \tag{1}$$

и уравнений Максвелла для плоских монохроматических волн

$$\mathbf{m}^{\times}\mathbf{E}=\mathbf{H}, \quad \mathbf{m}^{\times}\mathbf{H}=-\mathbf{D}, \tag{2}$$

где $\mathbf{m}^{\times}$ — антисимметричный тензор второго ранга, дуальный вектору рефракции $\mathbf{m}=n\mathbf{n}$, n — показатель преломления, $\mathbf{n}$ — единичный вектор волновой нормали.

Разделим эрмитов тензор обратной диэлектрической проницаемости ε^{-1} на симметричную и антисимметричную части

$$\varepsilon^{-1}=\chi+i\mathbf{G}^{\times}, \tag{3}$$

причем симметричный тензор χ можно записать в виде

$$\chi=\chi^0+\chi', \tag{4}$$

где χ^0 — обратный тензор диэлектрической проницаемости кристалла в отсутствие магнитного упорядочения (в парамагнитной фазе), χ' — небольшая тензорная добавка, обусловленная магнитным упорядочением. Как и χ^0, тензор χ' также симметричен; $\varepsilon^{-1}=\varepsilon^{-1}(\mathbf{h}_i)$ является функцией векторов намагниченностей магнитных подрешеток $\mathbf{h}_i$. Согласно принципу симметрии кинетических коэффициентов [11],

$$\varepsilon^{-1}(\mathbf{h}_i)=\tilde{\varepsilon}^{-1}(-\mathbf{h}_i), \tag{5}$$

откуда следует, что тензор χ является четной функцией, а вектор гирации $\mathbf{G}$ — нечетной функцией магнитных моментов подрешеток. Ограничиваясь членами первого и второго порядка в разложении в ряд по магнитным моментам подрешеток, считаем, что линейный магнитооптический эффект феноменологически описывается антисимметричной частью $i\mathbf{G}^{\times}$ тензора ε^{-1}, а квадратичный — симметричным тензором χ'.

В [12] в общем виде была рассмотрена задача о поляризации плоских электромагнитных волн в кристаллах, описываемых эрмитовым тензором обратной диэлектрической проницаемости ε^{-1}, следовательно, общие результаты, полученные в [12], применимы в данном случае.

Для произвольного направления волновой нормали $\mathbf{n}$ показатели преломления $n_{\pm}$ изонормальных волн определяются из уравнения нормалей

$$\frac{1}{n^4}+\frac{1}{n^2}\mathbf{n}(\chi-\chi_c)\mathbf{n}+\mathbf{n}\bar{\chi}\mathbf{n}-(\mathbf{nG})^2=0, \tag{6}$$

а поляризация векторов поля имеет вид [12]

$$\mathbf{H}_{\pm}\parallel([\mathbf{n},\ (\chi-1/n_{\mp}^2)[\mathbf{nd}]]-i\mathbf{nG}\cdot[\mathbf{nd}]), \tag{7}$$

$$\mathbf{D}_{\pm}\parallel\mathbf{H}_{\mp}^*,\quad \mathbf{E}_{\pm}=(\chi+i\mathbf{G}^{\times})\mathbf{D}_{\pm}, \tag{8}$$

где χ_c — след тензора χ, $\bar{\chi}=\chi^{-1}|\chi|$ — матрица, взаимная χ, $|\chi|$ — определитель матрицы χ, $\mathbf{d}$ — произвольный вектор, неколлинеарный $\mathbf{n}$.

Выражение (7) можно преобразовать и записать также в другой форме [12]

$$\mathbf{H}_{\pm}\parallel(\mathring{\mathbf{H}}_{\pm}\pm i\gamma[\mathbf{n}\mathring{\mathbf{H}}_{\pm}]), \tag{9}$$

$$\gamma=\mathbf{nG}/(1/\mathring{n}_{+}^2-1/\mathring{n}_{-}^2), \tag{10}$$

где $\mathring{\mathbf{H}}_{\pm}$ и $\mathring{n}_{\pm}$ — векторы напряженности магнитного поля и показатели преломления линейно поляризованных волн в отсутствие гиротропии ($\mathbf{G}=0$), а γ — эллиптичность волны. При совпадении волновой нормали с одной из оптических осей кристалла $\mathbf{c}_i$ ($i=1,\ 2$) выражения (9), (10) теряют смысл. Тогда, согласно (7), векторы $\mathbf{H}_{\pm}$ будут представлять собой две циркулярно поляризованные волны, распространяющиеся с различными скоростями

$$\mathbf{H}_{\pm}\parallel([\mathbf{c}_i\mathbf{d}]\pm i[\mathbf{c}_i[\mathbf{c}_i\mathbf{d}]]). \tag{11}$$

Наконец, при $\mathbf{n}\parallel\mathbf{c}_i$, $\mathbf{c}_i\mathbf{G}=0$ отсутствует двупреломление, и поэтому в кристалле распространяется лишь одна волна произвольной поляризации [13].

Соотношения (6) — (8) для определения поляризации векторов поля в прозрачных магнитоупорядоченных кристаллах удобно применять тогда, когда тензор ε^{-1} задается в общем виде. Если же известны оптические оси кристалла, входящие явным образом в аксиальное представление [14, 15] тензора χ

$$\chi=a+b(\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{c}_2+\mathbf{c}_2\cdot\mathbf{c}_1) \tag{12}$$

для двуосных и

$$\chi=\chi_o+(\chi_e-\chi_o)\mathbf{c}\cdot\mathbf{c} \tag{13}$$

для одноосных кристаллов, то удобнее использовать более простые выражения (9) — (11). Формулы (9) — (11) в явном виде задают направления большой ($\mathring{\mathbf{H}}_{\pm}$) и малой ($[\mathbf{n}\mathring{\mathbf{H}}_{\pm}]$) осей эллипса поляризации векторов $\mathbf{H}_{\pm}$, а также их отношение — эллиптичность γ.

Вообще говоря, тензор χ является двуосным. Однако в определенных случаях χ может быть одноосным и даже изотропным, что зависит от магнитной симметрии кристалла и соотношения между его параметрами.

Для определения осей тензора (4) удобно применять приближенные методы, разработанные в [16–18]. В этих работах развита теория вынужденной оптической анизотропии в кристаллах при внешних воздействиях. Изменение тензора χ^0 под влиянием магнитного упорядочения будем рассматривать по аналогии с [16–18], как изменение оптических свойств кристалла, индуцированное внешним воздействием. Случай, когда кристалл выше температуры магнитного упорядочения изотропен (кубические кристаллы), резко отличается от тех случаев, когда в парамагнитной фазе кристалл является анизотропным. Это обусловлено тем, что в кубических кристаллах отсутствует естественное двупреломление, и вся анизотропия является вынужденной, обусловленной магнитным упорядочением. Тогда удобно применять другой приближенный метод, разработанный Ф. И. Федоровым в теории упругих волн в кристаллах [15].

Рассмотрим кубические кристаллы, к которым относятся, в частности, ферриты-гранаты. Под действием магнитного упорядочения кубические ферримагнетики превращаются в общем случае в оптически двуосные кристаллы. Исследуем направления индуцированных оптических осей в зависимости от направления спонтанной намагниченности $\mathbf{h}$ в кристалле и соотношения между его параметрами. Отметим, что в [19] этот вопрос рассматривался лишь для случаев направления намагниченности вдоль кристаллографических осей симметрии $\mathbf{L}_2$, $\mathbf{L}_3$ и $\mathbf{L}_4$.

Симметричную часть χ тензора ε^{-1} (3) для кубических магнитных кристаллов можно записать в виде [15]

$$\chi=c_1+\overset{\mathbf{e}\cdot\mathbf{e}}{c_2}+c_3\alpha, \quad \alpha=e_1^2\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{a}_1+e_2^2\mathbf{a}_2\cdot\mathbf{a}_2+e_3^2\mathbf{a}_3\cdot\mathbf{a}_3, \tag{14}$$

где $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ — единичные взаимно перпендикулярные векторы, ориентированные вдоль кристаллографических осей четвертого порядка; c_1, c_2, c_3 — параметры кристалла, квадратично зависящие от вектора намагниченности $\mathbf{h}$;

$$\mathbf{e}=\mathbf{h}/|\mathbf{h}|, \quad e_i=\mathbf{e}\mathbf{a}_i, \quad i=1, 2, 3.$$

Известно, что оси симметричного тензора второго ранга лежат в плоскости его собственных векторов, отвечающих наибольшему и наименьшему собственным значениям. Поэтому для нахождения осей тензора χ необходимо сначала решить характеристическое уравнение

$$(\chi-\lambda)\mathbf{u}_i=0, \quad i=1, 2, 3. \tag{15}$$

Рассмотрим различные случаи направления вектора намагниченности.

1. Вектор $\mathbf{e}$ лежит в одной из шести некоординатных (диагональных) плоскостей симметрии. Тогда

$$\mathbf{e}=e_1(\mathbf{a}_1\pm\mathbf{a}_2)+e_3\mathbf{a}_3. \tag{16}$$

Легко видеть, что одним из собственных векторов тензора χ будет

$$\mathbf{u}_1=\mathbf{a}_1\pm\mathbf{a}_2 \tag{17}$$

с собственным значением

$$\lambda_1=c_1+c_3e_1^2. \tag{18}$$

Далее, из условия $\mathbf{u}_{2,3}\mathbf{u}_1=0$ находим

$$\mathbf{u}_{2,3}=e_1e_3(\mathbf{a}_1\pm\mathbf{a}_2)+(\nu_{2,3}-2e_1^2)\mathbf{a}_3, \quad \lambda_{2,3}=c_1+c_2(ke_1^2+\nu_{2,3}), \tag{19}$$

где введены обозначения

$$\nu_{2,3}=b\pm(b^2+2e_1^2(1-2b))^{1/2}, \quad b=1/2[1-k(3e_i^2-1)], \quad k=c_3/c_2. \tag{20}$$

Анализируя величины λ_1, λ_2, λ_3 в зависимости от изменения параметров c_3, c_2 и b, приходим к следующим результатам.

А) Все три собственных значения тензора χ различны, т. е. χ двуосен. В этом случае всегда $b\neq0$. При $b<0$ $\lambda_2>\lambda_3>\lambda_1$, а при $b<0$ $\lambda_2>\lambda_1>\lambda_3$.

Б) Два из трех собственных значений тензора χ совпадают, т. е. χ одноосен. Это возможно лишь в случаях:

а) $\mathbf{e}\|\mathbf{L}_4$ или $\mathbf{L}_3$; оптическая ось $\mathbf{c}\|\mathbf{e}$;

б) $k=0$ при произвольном $\mathbf{e}$; ось $\mathbf{c}$ также параллельна $\mathbf{e}$;

в) $k=\pm\infty$, т. е. $c_2=0$ при произвольном $\mathbf{e}$; теперь ось $\mathbf{c}\|\mathbf{a}_3\perp\mathbf{e}$;

г) $\mathbf{e}\|\mathbf{L}_4$ и $k=-2$; ось $\mathbf{c}\perp\mathbf{e}$.

В) Все три собственных значения тензора χ совпадают и χ остается изотропным (скаляром) в случаях

а) $\mathbf{e}\|\mathbf{L}_4$ и $k=-1$,

б) $\mathbf{e}\|\mathbf{L}_3$ и $c_2=0$.

Таким образом, если вектор намагниченности $\mathbf{e}$ расположен в одной из некоординатных плоскостей симметрии P, то тензор χ в общем случае А) становится двуосным, причем взаимное расположение оптических осей зависит от знака параметра b (20). При $b>0$ оси расположены в той же диагональной плоскости симметрии P, что и вектор $\mathbf{e}$, а при $b<0$ — в плоскости, проходящей через ось второго порядка, перпендикулярную плоскости P. В случаях Б) кристалл превращается в одноосный, а в случаях В) остается изотропным.

2. Вектор $\mathbf{e}$ лежит в одной из трех координатных плоскостей симметрии Q. Эта ситуация аналогична исследованной в [20]. Поэтому остановимся только на условиях, при которых χ может быть одноосным. Кроме тривиальных условий ($\mathbf{e}\|\mathbf{L}_4$, либо $k=0$), оказывается, что возможно еще условие $k=-2$. Действительно, так как вектор $\mathbf{e}$ имеет вид

$$\mathbf{e}=e_1\mathbf{a}_1+e_2\mathbf{a}_2, \tag{21}$$

то при $k=-2$, как можно убедиться, χ становится одноосным тензором

$$\chi=c_1-c_2\mathbf{c}\cdot\mathbf{c}, \tag{22}$$

где оптическая ось

$$\mathbf{c}=e_1\mathbf{a}_1-e_2\mathbf{a}_2. \tag{23}$$

Таким образом, когда вектор намагниченности $\mathbf{e}$ находится в координатной плоскости, то при выполнении соотношения $k=-2$ кубический кристалл превращается в одноосный, причем оптическая ось $\mathbf{c}$ и вектор $\mathbf{e}$ расположены симметрично относительно кристаллографических осей четвертого порядка плоскости Q, но не коллинеарны друг другу. При повороте намагниченности $\mathbf{e}$ в плоскости Q оптическая ось $\mathbf{c}$ поворачивается в противоположном направлении на тот же угол. Векторы $\mathbf{c}$ и $\mathbf{e}$ становятся параллельными при $\mathbf{e}\|\mathbf{L}_4$ и перпендикулярными при $\mathbf{e}\|\mathbf{L}_2$.

Необходимо подчеркнуть, что до сих пор считалось [19, 21], что кубические кристаллы под действием внутреннего магнитного упорядочения становятся одноосными в случаях, когда $\mathbf{e}\|\mathbf{L}_4$, $\mathbf{L}_3$, либо при $k=0$. Между тем полученные выше условия одноосности $k=-2$ тензора χ при произвольном расположении намагниченности в координатной плоскости, а также условие одноосности $c_2=0$ для диагональной плоскости симметрии, как следует из данных [19, 21], должны экспериментально выполняться для некоторых ферритов-гранатов. Условие изотропности тензора ε^{-1} по χ (при $\mathbf{G}\neq0$) также может осуществляться для некоторых ферритов-гранатов в области температуры компенсации [19, 21].

3. Вектор $\mathbf{e}$ не принадлежит плоскостям симметрии. Здесь, как уже указывалось выше, для решения уравнения (15) удобнее всего применить приближенный метод [15], только необходимо учесть, что при $|k|\geqslant1$ тензору χ следует сопоставлять тензор условной поперечно-изотропной среды, а не изотропной.

При $c_3\neq0$ кристалл всегда является двуосным. Действительно, нетрудно доказать, что необходимое условие одноосности тензора χ формально совпадает с необходимым условием особых направлений в теории упругих волн в кристаллах [15]

$$\mathbf{e}\chi^2[\mathbf{e}, \mathbf{e}\chi]=0, \tag{24}$$

которое для кубических кристаллов сводится к

$$c_3^2(e_1^2-e_2^2)(e_1^2-e_3^2)(e_2^2-e_3^2)e_1e_2e_3=0, \tag{25}$$

откуда следует, что в кубических кристаллах тензор χ может быть одноосным (при $c_3\neq0$) лишь при ограничениях $e_i=0$ или $e_i=e_k$, определяющих плоскости симметрии.

Если известны оптические оси кристалла, то поляризация электромагнитных волн определяется выражениями (9)–(10), однако для кубических кристаллов можно, и часто удобнее, определять поляризацию непосредственно из уравнений (7), (8), не находя предварительно оптические оси $\mathbf{c}_1$ и $\mathbf{c}_2$. Отметим, что в [10, 11] рассматривалась поляризация плоских электромагнитных волн в ферритах-гранатах лишь для нескольких предельных случаев.

Из (6) имеем

$$1/n_\pm^2={}^1/_2[(\mathbf{n}(\chi-\chi_c)\mathbf{n})\pm\sqrt{(\mathbf{n}(\chi-\chi_c)\mathbf{n})^2-4(\mathbf{n}\chi\mathbf{n}-(\mathbf{nG})^2)}]. \tag{26}$$

Подставляя (14) в (26) и применяя инвариантный метод [14, 15], выражение (26) можно преобразовать к виду

$$1/n_\pm^2=c_1+\xi\pm\sqrt{\xi^2+c_3\mathbf{n}\alpha\mathbf{n}-c_2c_3[\mathbf{ne}]\alpha[\mathbf{ne}]+(\mathbf{nG})^2}, \tag{27}$$

где

$$\xi={}^1/_2(c_2[\mathbf{ne}]^2+c_3(1-\mathbf{n}\alpha\mathbf{n})). \tag{28}$$

Выражения (27), (28) значительно упрощаются для ряда важных частных случаев. Пусть $\mathbf{e}\|\mathbf{L}_4$, например $\mathbf{e}\|\mathbf{a}_3$. Тогда

$$1/n_\pm^2=c_1+{}^1/_2(c_2+c_3)(1-n_3^2)\pm\sqrt{{}^1/_4(c_1+c_3)^2(1-n_3^2)^2+(\mathbf{nG})^2}. \tag{29}$$

Если же $\mathbf{n}\|\mathbf{e}$, то

$$\frac{1}{n_\pm^2}=c_1+\frac{c_3}{2}(1-\mathbf{e}\alpha\mathbf{e})\pm\sqrt{c_3^2[{}^1/_4(1-\mathbf{e}\alpha\mathbf{e})^2-3|\alpha|]+(\mathbf{nG})^2}, \tag{30}$$

где

$$\mathbf{e}\alpha\mathbf{e}=e_1^4+e_2^4+e_3^4,\quad |\alpha|=e_1^2e_2^2e_3^4. \tag{31}$$

В этом случае показатели преломления не зависят от параметра кристалла c_2.

Перейдем к определению ориентации вектора напряженности магнитного поля $\mathbf{H}$. Для этого в (7) подставим (27), (14), причем в качестве вектора $\mathbf{d}$ в (7) удобнее всего использовать вектор $\mathbf{e}$. Тогда получаем следующее простое выражение:

$$\mathbf{H}_\pm\|([\mathbf{n}, (c_1-1/n_\mp^2+c_3\alpha)[\mathbf{ne}]]-i\mathbf{nG}\cdot[\mathbf{ne}]). \tag{32}$$

Формула (32) справедлива для произвольного расположения векторов $\mathbf{n}$ и $\mathbf{e}$ в кристалле, за исключением случая, когда $\mathbf{n}\|\mathbf{e}$. Однако тогда соотношение (7) принимает вид

$$\mathbf{H}_\pm\|([\mathbf{e}, (c_1-1/n_\mp^2+c_3\alpha)[\mathbf{ed}]]-i\mathbf{eG}\cdot[\mathbf{ed}]) \tag{33}$$

и, полагая здесь $\mathbf{d}\|\mathbf{a}_1$, имеем

$$\mathbf{H}_\pm\|([\mathbf{e}, (c_1-1/n_\mp^2)[\mathbf{ea}_1]+c_3n_2n_3(n_2\mathbf{a}_2-n_3\mathbf{a}_3)]-i\mathbf{eG}\cdot[\mathbf{ea}_1]). \tag{34}$$

Таким образом, в кубических кристаллах поляризация распространяющихся электромагнитных волн (для вектора $\mathbf{H}$) в общем случае является эллиптической; при $\mathbf{nG}=0$ — линейной; вдоль оптических осей в одно- и двуосных кристаллах и для произвольных направлений в χ-изотропных — круговой; при $\mathbf{nG}=[\mathbf{nc}_i]=0$ для χ-анизотропных и при $\mathbf{nG}=0$ для χ-изотропных кристаллов — произвольной.

Литература

1. P. S. Pershan. J. Appl. Phys., **38**, 1482, 1967.
2. W. J. Tabor, F. S. Chen. J. Appl. Phys., **40**, 2760, 1969.
3. B. D. Father, B. K. Tanner. Philos. Mag., **27**, 17, 1973.
4. Р. В. Писарев, Н. Г. Синий, Г. А. Смоленский. Письма в Ж. эксперим. и теор. физ., **9**, 112, 1969; там же, **9**, 294, 1969.
5. *J. F. Dillon, J. P. Remeika, C. R. Staton. J. Appl. Phys., **40**, 1510, 1969; Ibid., **41**, 4613,* 1970.
6. В. Д. Тронько. Оптика и спектроскопия, **29**, 354, 1970.
7. Р. В. Писарев, И. Г. Синий, Г. А. Смоленский. Физ. твердого тела, **12**, 118, 1970.
8. S. Derormiere, H. Le Gall. Solid State Commun., **9**, 1029, 1971.
9. Ф. В. Лисовский. Оптика и спектроскопия, **34**, 947, 1973.
10. А. А. Соломко, В. И. Мыкитюк. Оптика и спектроскопия, **36**, 410, 1974.
11. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Электродинамика сплошных сред. Физматгиз, М., 1959.
12. Б. В. Бокуть, С. С. Гиргель. Кристаллография, **21**, 264, 1975.
13. Л. М. Барковский. Оптика и спектроскопия, **34**, 1193, 1973.
14. Ф. И. Федоров. Оптика анизотропных сред. Изд-во АН БССР, Минск, 1958.
15. Ф. И. Федоров. Теория упругих волн в кристаллах. «Наука», М., 1965.
16. Ф. И. Федоров, Л. М. Барковский. Оптика и спектроскопия, **18**, 1047, 1965.
17. Ф. И. Федоров, Л. М. Барковский. Ж. прикл. спектроскопии, **3**, 83, 1965.
18. Ф. И. Федоров, Л. М. Барковский. Кристаллография, **11**, 766, 1966.
19. Р. В. Писарев, И. Г. Синий, Н. Н. Колпакова. Ю. М. Яковлев. Ж. эксперим. и теор. физ., **60**, 2188, 1971.
20. Ф. И. Федоров. Уч. зап. Белорусск. ун-т, **15**, 68, 1953.
21. Физика магнитных диэлектриков. «Наука», Л., 1974.

Гомельский государственный
университет

Поступила в редакцию
31.I.1975