

Академик АН УССР А. И. АХИЕЗЕР, С. В. ПЕЛЕТМИНСКИЙ

КИНЕТИКА ЧЕРНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

1. Хорошо известно, что если в теле, находящемся в состоянии статистического равновесия, сделать внутреннюю полость, то в ней возникнет равновесное излучение. В настоящей работе мы исследуем, как происходит процесс термализации фотонов в такой полости и окружающем ее веществе.

Считая температуру вещества нерелятивистской, мы будем исходить из нерелятивистского гамильтониана системы вещество — фотоны

$$H = H_m + H_f + V,$$

где H_m — гамильтониан вещества (с учетом энергии кулоновского взаимодействия между частицами), H_f — гамильтониан свободного излучения,

$$H_f = \sum_{k\lambda=1}^2 \omega_k c_{k\lambda}^+ c_{k\lambda},$$

($c_{k\lambda}$ и $c_{k\lambda}^+$ — операторы поглощения и испускания фотона с частотой $\omega_k = ck$, волновым вектором k и поляризацией λ , $\lambda = 1, 2$), V — гамильтониан взаимодействия поперечных фотонов с веществом ⁽¹⁾,

$$V = V_1 + V_2,$$

$$V_1 = -\frac{1}{c} \int dx A(x) j(x), \quad V_2 = \frac{e}{2mc^2} \int dx A^2(x) \sigma(x), \quad (1)$$

$j(x)$ и $\sigma(x)$ — операторы плотности тока и заряда в веществе и $A(x)$ — векторный потенциал:

$$A(x) = \frac{1}{\sqrt{\Omega}} \sum_{k\lambda=1}^2 \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} e_k^{(\lambda)} \{c_{k\lambda} e^{ikx} + c_{k\lambda}^+ e^{-ikx}\}$$

($e_k^{(\lambda)}$ — вектор поляризации фотона в состоянии k , λ ; Ω — нормировочный объем).

Рассмотрим сначала процесс установления теплового равновесия фотонов в самом веществе, в отсутствие полости.

В нерелятивистском случае энергия кулоновского взаимодействия между частицами вещества значительно больше энергии взаимодействия V . Поэтому раньше всего установится состояние статистического равновесия для вещества, описываемое распределением Гиббса

$$\rho_m = \exp(F_m - \beta H_m) \quad (2)$$

($\beta^{-1}F_m$ — свободная энергия, β — обратная температура). Кроме того, будет быстро происходить эволюция подсистемы фотонов со свободным гамильтонианом H_f и благодаря ослаблению корреляций установится состояние, описываемое однофотонной матрицей плотности $N_{\lambda\lambda'}(k)$. При этом матрица плотности фотонного газа будет иметь вид

$$\rho_f = \exp \left[F_f - \sum_{k\lambda\lambda'} X_{\lambda\lambda'}(k) c_{k\lambda}^+ c_{k\lambda'} \right], \quad (3)$$

где величины F_f и $X_{\lambda\lambda'}(k)$ определяются однофотонной матрицей плотности $N_{\lambda\lambda'}(k)$,

$$\text{Sp } \rho_f = 1, \quad \text{Sp } \rho_f c_{k\lambda}^+ c_{k\lambda'} = N_{\lambda'\lambda}(k).$$

Подчеркнем, что оба распределения ρ_m и ρ_f устанавливаются в отсутствие взаимодействия между веществом и излучением. При $V = 0$ параметры β и $N_{\lambda\lambda'}$, характеризующие распределения ρ_m и ρ_f , будут константами. В действительности, благодаря взаимодействию фотонов с веществом эти параметры будут изменяться, но так как взаимодействие в рассматриваемом нерелятивистском случае мало, то это изменение будет происходить медленно. Это значит, что время τ_0 , в течение которого параметры β и $N_{\lambda\lambda'}$ претерпят существенное изменение, будет велико по сравнению с временем установления распределений ρ_m и ρ_f .

2. При включении энергии взаимодействия матрица плотности всей системы вещество — излучение станет зависеть от времени, причем эта зависимость будет обуславливаться зависимостью от времени параметров $N_{\lambda\lambda'}$ и β .

Обозначая совокупность операторов H_m и $c_{k\lambda} + c_{k\lambda'}$ буквой $\hat{\gamma}$ и вводя величины γ ,

$$\gamma(t) = \text{Sp } \rho(t) \hat{\gamma},$$

можно сказать, что матрица плотности всей системы $\rho(t)$ будет зависеть от времени t только через $\gamma(t)$.

$$\rho(t) = \rho\{\gamma(t)\}.$$

Параметры $\gamma(t)$ будут меняться со временем согласно закону

$$\dot{\gamma}(t) = i \text{Sp } \rho\{\gamma(t)\} [V, \hat{\gamma}] \equiv L\{\gamma(t)\}. \quad (4)$$

Как показано в ⁽²⁾, $L\{\gamma\}$ во втором приближении теории возмущений по взаимодействию определяется формулой

$$L^{(2)}\{\gamma\} = - \int_{-\infty}^0 d\tau \text{Sp} \rho^{(0)}\{\gamma\} [V(\tau), [V, \hat{\gamma}]], \quad (5)$$

$$V(\tau) = e^{iH_0\tau} V e^{-iH_0\tau}, \quad H_0 = H_m + H_f,$$

$$\rho^{(0)}\{\gamma\} = \rho_m \rho_f, \quad \text{Sp } \rho^{(0)}\{\gamma\} = 1, \quad \text{Sp } \rho^{(0)}\{\gamma\} \hat{\gamma} = \gamma.$$

Если $\hat{\gamma} = c_{k\lambda}^\dagger c_{k\lambda'}$, то это выражение представляет собой интеграл столкновений для фотонов.

3. Переходя к вычислению $L^{(2)}\{\gamma\}$, заметим, что гамильтониан V_1 описывает (в первом приближении теории возмущений) эффекты испускания и поглощения фотонов, а V_2 — рассеяние фотонов (во втором приближении теории возмущений V_1 также вносит вклад в сечение рассеяния, по порядку величины совпадающей с вкладом от V_2 в первом приближении).

Вероятность поглощения и испускания фотона частоты ω по порядку величины равна

$$w_r \approx \frac{1}{137} \omega \left(\frac{\omega a}{c} \right)^2,$$

где a — боровский радиус. Сечение рассеяния фотонов по порядку величины равно $\sigma_c \sim (e^2 / (mc^2))^2$. Поэтому, если n — число частиц в единице объема, то среднее время пробега фотона по отношению к рассеянию будет $\tau_c \sim (\sigma_c n c)^{-1}$.

Если $w_r \tau_c \gg 1$, что имеет место при $\omega \gg \omega_0$, $\omega_0 = c(137n\sigma_c a^{-2})^{1/2}$, то процессы испускания и поглощения фотонов будут более существенными, чем процессы рассеяния и в выражении (5) гамильтониан V можно заменить на V_1 .

Величина ω_0 по порядку величины при $n \sim 10^{23}$ равна $\omega_0 \sim 10^{15}$. Частота ω_0 соответствует температуре $T_0 = \hbar \omega_0 \sim (10^4)^{\circ}$. Поэтому, если температура стенок будет значительно больше T_0 ; $T \gg T_0$, то в гамильтониане V можно пренебречь слагаемым V_2 и ограничиться учетом первого борновского приближения при вычислении интеграла столкновений фо-

тонов $L^{(2)}$. Если же $T < T_0$, то такое пренебрежение законно, строго говоря, только при $\omega > \omega_0$.

Найдем теперь интеграл столкновений фотонов $L^{(2)}$ в первом борновском приближении по V_1 . Заменяя в (5) $V \rightarrow V_1$ и полагая $\hat{\gamma} = c_{k\lambda}^+ c_{k\lambda'}$, получим в результате усреднения по состояниям фотонов

$$L^{(2)}\{\gamma\} \equiv L_{\lambda\lambda'}^{(2)}(\mathbf{k}) = -\frac{1}{\tau_k} (N_{\lambda\lambda'} - N^0 \delta_{\lambda\lambda'}), \quad \frac{1}{\tau_k} = \frac{\pi I(k)}{\omega N^0}, \quad N^0 = (e^{\beta\omega} - 1)^{-1}, \quad (6)$$

где $I(\mathbf{k}) = I(\mathbf{k}, kc)$ и $I(\mathbf{k}, \omega)$ — спектральная функция,

$$I(\mathbf{k}, \omega) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{-i\omega\tau} \text{Sp } \rho_m j_{\lambda}(\mathbf{k}, \tau) j_{\lambda'}^+(\mathbf{k})$$

($j_{\lambda}(\mathbf{k}, \tau)$ — поперечная относительно k составляющая тока, $\lambda = 1, 2$; суммирование производится по $\lambda = 1, 2$ и вещество предполагается изотропным).

Если $\sigma_{ij}(\mathbf{k}, \omega)$ — тензор проводимости ⁽³⁾,

$$j_i(\mathbf{k}, \omega) = \sigma_{ij}(\mathbf{k}, \omega) E_j(\mathbf{k}, \omega),$$

где $j_i(\mathbf{k}, \omega)$ — среднее значение микроскопического тока и $E_j(\mathbf{k}, \omega)$ — внешнее электрическое поле, то величина $I(\mathbf{k}, \omega)$ может быть выражена через $\text{Re } \sigma_{ij}(\mathbf{k}, \omega)$:

$$I(\mathbf{k}, \omega) = \frac{\omega}{4\pi} N^0 \text{Re } \sigma_{\lambda\lambda}(\mathbf{k}, \omega).$$

Зная $L^{(2)}$, можно согласно (4) написать кинетическое уравнение для однофотонной матрицы плотности в веществе:

$$\frac{\partial N_{\lambda\lambda'}}{\partial t} = -\frac{1}{\tau_k} (N_{\lambda\lambda'} - N^0 \delta_{\lambda\lambda'}), \quad \frac{1}{\tau_k} = \frac{1}{2} \text{Re } \sigma_{\lambda\lambda}(\mathbf{k}, kc). \quad (7)$$

Это уравнение показывает, что в веществе планковское распределение устанавливается за время порядка τ_k .

Кинетическое уравнение (7) учитывает только процессы испускания и поглощения фотонов и не учитывает процесса их рассеяния, которое, как указывалось выше, описывается гамильтонианом V_2 в первом приближении теории возмущений и гамильтонианом V_1 во втором приближении. Мы не будем здесь заниматься учетом эффекта рассеяния, так как эта задача не представляет большого интереса. Действительно, так как в нерелятивистской области рассеяние фотонов является упругим, то учет его приведет лишь к более быстрому установлению равновесного распределения фотонов по направлениям, но не затронет скорости установления равновесия по энергии, которое по-прежнему будет определяться в основном гамильтонианом взаимодействия V_1 .

5. Предположим теперь, что в веществе имеется полость, причем для простоты будем считать, что она ограничена двумя параллельными плоскостями $x = 0$, $x = L$. Функция распределения фотонов $N_{\lambda\lambda'}(\mathbf{k}) \equiv N$, зависящая от x , будет определяться кинетическим уравнением

$$\frac{\partial N}{\partial t} + c \frac{k_x}{k} \frac{\partial N}{\partial x} = \begin{cases} \frac{1}{\tau_k} (N^0(\mathbf{k}) - N), & x > L, \quad x < 0, \\ 0, & 0 < x < L. \end{cases} \quad (8)$$

При этом необходимо, чтобы толщина переходного слоя в веществе, в котором распределение частиц может отличаться от гиббсовского, была мала по сравнению с длиной свободного пробега фотонов и размерами полости L .

Уравнение (8) должно быть решено при заданной начальной функции распределения фотонов $N(\mathbf{k}, x; 0) \equiv N_0(\mathbf{k}, x)$. Как видно из этого уравнения, функция $N(\mathbf{k}, x; t)$ должна быть непрерывной или $x = 0$ и $x = L$.

Мы не будем решать уравнение (8), а приведем сразу окончательный результат, считая для простоты, что $\beta = \text{const}$.

Если $x < 0, k_x < 0$, то

$$\begin{aligned} \Delta N(\mathbf{k}, x; t) = & \exp(-t/\tau_k) \Delta N(\mathbf{k}, x - ct \cos \vartheta; 0) \theta(-x + ct \cos \vartheta) + \\ & + \exp\left[-\frac{1}{\tau_k} \left(t + \frac{L}{c \cos \vartheta}\right)\right] \Delta N(\mathbf{k}, x - ct \cos \vartheta; 0) \theta(x - L - ct \cos \vartheta) + \\ & + \exp\left(-\frac{1}{\tau_k} \frac{x}{c \cos \vartheta}\right) \Delta N(\mathbf{k}, x - ct \cos \vartheta; 0) \theta(L - x + ct \cos \vartheta) \theta(x - ct \cos \vartheta); \end{aligned}$$

если $x < 0, k_x > 0$, то

$$\Delta N(\mathbf{k}, x; t) = \exp(-t/\tau_k) \Delta N(\mathbf{k}, x - ct \cos \vartheta; 0);$$

если $0 < x < L, k_x > 0$, то

$$\begin{aligned} \Delta N(\mathbf{k}, x; t) = & \exp\left[-\frac{1}{\tau_k} \left(t - \frac{x}{c \cos \vartheta}\right)\right] \Delta N(\mathbf{k}, x - ct \cos \vartheta; 0) \theta(-x + ct \cos \vartheta) + \\ & + \Delta N(\mathbf{k}, x - ct \cos \vartheta; 0) \theta(x - ct \cos \vartheta); \end{aligned}$$

если $0 < x < L, k_x < 0$, то

$$\begin{aligned} \Delta N(\mathbf{k}, x, t) = & \exp\left[-\frac{1}{\tau_k} \left(t + \frac{L-x}{c \cos \vartheta}\right)\right] \Delta N(\mathbf{k}, x - ct \cos \vartheta; 0) \theta(-L + \\ & + x - ct \cos \vartheta) + \Delta N(\mathbf{k}, x - ct \cos \vartheta; 0) \theta(-x + L + ct \cos \vartheta). \end{aligned}$$

Здесь $\Delta N(\mathbf{k}, x, t) = N(\mathbf{k}, x, t) - N^0(\mathbf{k})$, $\cos \vartheta = k_x / k$,

$$\theta(y) = \begin{cases} 1, & y > 0, \\ 0, & y < 0. \end{cases}$$

(Для простоты мы считали $\beta = \text{const}$, что справедливо при большой теплоемкости вещества, но учет изменения температуры не представляет затруднений.)

Обратим внимание на то, что не все слагаемые в этих выражениях затухают со временем по закону $\exp(-t/\tau_k)$; в ΔN входят также слагаемые, не содержащие этого множителя, которые тем не менее обращаются в нуль благодаря наличию θ -функции. Заметим, также, что для термолизации фотонов в веществе ($x < 0$) недостаточно условия $t \gg \tau_k$, так как при $k_x < 0$ должно еще выполняться условие $t > L/c \cos \vartheta$. Это связано с тем, что при $k_x < 0$ фотоны, влетающие в вещество, не будут термолизованы.

Харьковский государственный университет
им. А. М. Горького

Поступило
17 VI 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ А. И. Ахиезер, В. Б. Берестецкий, Квантовая электродинамика, «Наука», 1969. ² С. В. Пелетминский, А. А. Яценко, ЖЭТФ, 53, 1327 (1967). ³ П. Мартин, Ю. Швингер, Теория систем многих частиц, ИЛ, 1962.