Доклады Академии наук СССР
1972. Том 202, № 3

УДК 517.946 МАТЕМАТИКА

Э. Б. БЫХОВСКИЙ

НАЧАЛЬНО-КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ $u_t + a_x(u) = 0$

(Представлено академиком В. И. Смирновым 24 VI 1970)

Задаче Коши для уравнения

$$u_t + a_x(u) = 0 \tag{1}$$

и его многомерного аналога посвящено большое число работ, однако нам известна лишь работа [1], где рассматривается начально-краевая задача. Предлагаемая ниже обобщенная ее постановка, особенно в случае немонотонной $a(u)$, представляется нестандартной и достойной внимания.

Будем считать, что $a(u) \in C_2$ и строго выпуклая вниз функция. Условие выпуклости диктуется отнюдь не соображениями единственности и компактности, которые, как и в [2], могут быть получены без него. Оно фигурирует на некоторых этапах доказательства принятия предельной функцией граничных значений. Если $a(u)$ немонотонна, то без умаления общности будем считать $\min a(u) = a(0)$.

Будем рассматривать задачу в прямоугольнике Ω: $0 \leqslant x \leqslant 1$; $0 \leqslant t \leqslant H$. Пусть Γ_0, Γ_1 — левая и правая стороны прямоугольника Ω, Γ_0^+, Γ_1^+ — произвольные конечные (быть может, пустые) системы непересекающихся интервалов на этих сторонах, $\Gamma_k^- = \Gamma_k \setminus \Gamma_k^+$ $(k = 0, 1)$. При немонотонной $a(u)$ рассмотрим для уравнения (1) задачу

$$u|_{t=0} = u_0(x); \tag{2}$$

$$u\Big|_{\Gamma_0^+} = \varphi_0(t) > 0, \quad u\Big|_{\Gamma_1^+} = \varphi_1(t) < 0; \tag{3}$$

$$u\Big|_{\Gamma_0^-} \leqslant 0, \quad u\Big|_{\Gamma_1^-} \geqslant 0, \tag{4}$$

где $u_0(x)$ и $\varphi_k(t)$ — заданные функции. В случае монотонной $a(u)$ постановка задачи значительно проще и мало чем отличается от задачи Коши. Именно, при $a'(u) > 0$ в дополнение к (2) задается лишь условие $u|_{\Gamma_0} = \varphi_0(t)$, а при $a'(u) < 0$ условие $u|_{\Gamma_1} = \varphi_1(t)$.

В [1] (для уравнения, когда a зависит еще явно от x и t) рассмотрен случай задачи (1)—(4), когда $\Gamma_k^+ = \Gamma_k$, так что условий (4) нет.

Теорема единственности. *Решение задачи* (1)—(4) *единственно в следующем классе*:

1) $u(x, t)$ — *ограниченная функция*, $u \in BV(\Omega)$, *удовлетворяет уравнению* (1) *в соответствующем сильном смысле, а условиям* (2)—(4) *в смысле внутренних следов* $u(x, t)$ *на границе прямоугольника* (2);

2) *выполнено условие единственности Вольперта*: для произвольной константы* c

$$\frac{\partial |u - c|}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}[a(u) - a(c)] \operatorname{sign}(u - c) \leqslant 0 \tag{5}$$

Для доказательства заметим, что для двух решений u, v из указанного класса справедливо неравенство (5), в котором c заменено на v (2). Интегрируя это неравенство по области Ω_T: $0 \leqslant x \leqslant 1$; $0 \leqslant t \leqslant T < H$, имеем

* Которое в нашем случае, как известно, можно записать в других, более простых формах.

$$\int_0^1 |u(x,T)-v(x,T)|\,dx+\int_{\Gamma_1^-}[a(u)-a(v)]\operatorname{sign}(u-v)\,dt-$$
$$-\int_{\Gamma_0^-}[a(u)-a(v)]\operatorname{sign}(u-v)\,dt\leqslant 0.$$

Из условий (4) **следует** $\int\limits_{\Gamma_1^-}-\int\limits_{\Gamma_0^-}\geqslant 0$, а значит, утверждение теоремы.

При монотонной $a(u)$ доказательство еще проще.

Для доказательства существования оказывается полезным, как и в задаче Коши, бесконечно малый эллиптический регуляризатор μu_{xx}. Задачу (1)—(4) аппроксимируем начально-краевой задачей для уравнения

$$u_t^\mu+a_x(u^\mu)=\mu u_{xx}^\mu, \tag{6}$$

в которой условия (2), (3) сохранены, а вместо (4) ставятся условия

$$u^\mu\Big|_{\Gamma_0^-\cup\Gamma_1^-}=0. \tag{7}$$

Лемма 1. *При непрерывных* $\varphi_k(t)$ и $u_0(x)$ *величины* $\mu u_x^\mu(0,t)$ *и* $\mu u_x^\mu(1,t)$ *ограничены равномерно относительно* μ.

Результат получается, если сделать преобразование подобия независимых переменных $x=\mu\xi$; $t=\mu\tau$. Тогда лемма сведется к оценке производных v_ξ на боковых сторонах прямоугольника ширины μ^{-1} для решения начально-краевой задачи для уравнения $v_\tau+a_\xi(v)=v_{\xi\xi}$. Такая оценка барьерами, не зависящими от размера области, приводится в работе ([3]) (рассуждения из ([3]) нуждаются в небольшом усовершенствовании).

Теорема о компактности. *Величины* $|u^\mu(x,t)|$, $\int_0^1|u_x^\mu(x,t)|\,dx$, $\int_0^1|u_t^\mu(x,t)|\,dx$ *ограничены (при всех* $\mu\leqslant\mu_0$*) равномерно по* μ *константами, зависящими лишь от*

$$\max|u_0(x)|,\quad \max_{\Gamma_k^+}|\varphi_k(t)|;\quad \int_0^1\left|\frac{d^i}{dx^i}u_0(x)\right|dx\ (i=0,1,2),\quad \int_{\Gamma_k^+}|\varphi_k'(t)|\,dt.$$

При этом предполагается, что $\varphi_k'(t)$ *непрерывны на каждом замкнутом интервале из* Γ_0^+ *и* Γ_1^+ *и меняют знак конечное число раз.*

Поэтому функции $u^\mu(x,t)$ *компактны в* $L_1(\Omega)$, *причем каждая предельная функция* $u(x,t)$ *принадлежит* $BV(\Omega)$ *и, более того,* $\operatorname{Var}_x u(x,t)$ *равномерно ограничена по* $t\in[0,H]$.

Указанные оценки получаются аналогично задаче Коши в ([2]) умножением уравнений, получающихся из (6) дифференцированием по x и t, соответственно на $\operatorname{sign}u_x$ и $\operatorname{sign}u_t$ и интегрированием по Ω_t.

Остановимся на оценке второго интеграла. После указанной операции приходим к оценке $\int_0^1|u_t^\mu(x,T)|\,dx$ через интеграл с $u_0(x)$ и $\int_{\Gamma_{kT}}[\mu u_{tx}^\mu-a'(u)u_t^\mu]\operatorname{sign}u_t^\mu dt$ $(k=0,1)$, где Γ_{0T} и Γ_{1T} — левая и правая стороны Ω_T. Γ_{0T} распадается на конечное число промежутков, в каждом из которых $\operatorname{sign}u_t^\mu$ сохраняет знак. Поэтому

$$\left|\mu\int_{\Gamma_{0T}}u_{tx}^\mu\operatorname{sign}u_t dt\right|\leqslant 2\sum_i|\mu u_x(0,t_i)|,$$

где сумма справа содержит конечное число слагаемых и по лемме 1 ограничена (величинами, определяемыми $\max|u_0(x)|$ и $\max|\varphi_k(x)|$). Ограниченность интеграла от второго слагаемого получается проще.

З а м е ч а н и е. Все результаты, сформулированные до сих пор, получены без предположения выпуклости $a(u)$.

Для доказательства теоремы существования достаточно установить, что предельная функция $u(x, t)$ удовлетворяет условиям (2) — (4). Однако априорные эвристические соображения указывают, что задача (1) — (4) имеет решение не при всяких $\varphi_0(t)$, $\varphi_1(t)$ и нужно требовать, чтобы $\varphi_0(t)$ и $-\varphi_1(t)$ были достаточно велики. В самом деле, рассмотрим для (1) начально-краевую задачу в области $x \geqslant 0$, $t \geqslant 0$ при условиях

$$u|_{t=0} = -M < 0, \quad u|_{x=0} = \varphi_0 > 0 \quad (M,\ \varphi_0 \text{ — константы}) \qquad (7')$$

и сопоставим ее с задачей Римана $u|_{t=0} = \begin{cases} -M & (x > 0), \\ \varphi_0 & (x < 0). \end{cases}$

Решением задачи Римана является ударная волна, выходящая из начала координат, со скоростью распространения $dx/dt = [a(\varphi_0) - a(-M)] \times (\varphi_0 + M)^{-1}$. Если $a(\varphi_0) > a(-M)$, то $\omega = dx/dt > 0$, ударная волна отходит направо, и решение задачи Римана есть одновременно решение задачи (7′). Если же $a(\varphi_0) < a(-M)$, то ударная волна отходит налево и (7′) не имеет автомодельного (и, по-видимому, вообще никакого) решения.

Можно построить в явном виде функции u^μ, удовлетворяющие уравнению (6) и условиям $u^\mu|_{x=0} = \varphi_0 > 0$; $u^\mu|_{x=1} = -M$; $u^\mu|_{t=0} \xrightarrow[M\to 0]{} -M$. Если при этом $a(\varphi_0) < a(-M)$, то оказывается, что $\lim\limits_{\mu\to 0} u^\mu(x, t) \equiv -M$ при $t \geqslant 0$; $0 < x \leqslant 1$. Пусть $\min\limits_{\Omega} u^\mu(x, t) = -M$; $\max\limits_{\Omega} u^\mu(x, t) = m$.

Л е м м а 2. *Пусть $M > 0$, $A > 0$ — произвольные константы.*

Тогда существует функция $\Phi_0(M, A)$ такая, что, если параметр φ_0 достаточно велик, $\varphi_0 > \Phi_0(M, A)$, неравенство

$$a'\left(\frac{\varphi_0\tau + M\,[a'(-M) - A]}{\tau - [a'(-M) - A]}\right) - A > \tau$$

выполняется на некотором непустом интервале положительной полуоси τ.

Д о к а з а т е л ь с т в о элементарно и использует выпуклость $a(u)$.

Т е о р е м а с у щ е с т в о в а н и я. *Пусть начальные и граничные функции $u_0(x)$, $\varphi_k(t)$ таковы, как требуется в теоремах единственности и компактности и, кроме того, $\varphi_0(t)$ на каждом интервале Δ: $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ из системы Γ_0^+ удовлетворяет условию достаточной положительности по сравнению с M:* $\min\limits_{\Delta} \varphi_0 > \Phi_0(M, A)$,

$$A = \begin{cases} 0 & \textit{при} \quad \min\limits_{\Delta} \varphi_0'(t) \geqslant 0, \\ |\min \varphi_0'(t)|\,(t_1 - t_0)\,A'' & \textit{при} \quad \min\limits_{\Delta} \varphi_0'(t) < 0. \end{cases}$$

Для функции $\varphi_1(t)$ требуется выполнение аналогичного условия достаточной отрицательности по сравнению с m.

Тогда (каждая) предельная функция $u(x, t)$, фигурирующая в теореме о компактности, удовлетворяет условиям (2) — (5) и, значит, является решением задачи (1) — (4), принадлежащим классу единственности.

Наметим основные черты д о к а з а т е л ь с т в а.

1. Удовлетворение условиям (4). Пусть $[t_0, t_1]$ — какой-нибудь интервал из Γ_0^- с концами $D(0, t_0)$, $B(0, t_1)$, $w(x, t)$ — центрированная автомодельная волна разрежения с центром в D, DC — луч, на котором $w = M$. Поскольку $w(0, t) = 0$, то достаточно доказать неравенство $u(x, t) \leqslant w(x, t)$ почти всюду в пределах угла BDC. Поскольку w не имеет нужных для барьерной функции ограниченных производных и удовлетворяет уравнению, а не неравенству, то в качестве барьера берется функция $w^\varepsilon(x, t)$, являющаяся центрированным автомодельным решением уравнения $w_t^\varepsilon + a_x(w^\varepsilon) = \varepsilon w_x^\varepsilon \geqslant C_1 > 0$ с центром, лежащим на продолжении луча DC вниз за точку D на расстоянии ε.

Применение принципа максимума к $u^\mu - w^\varepsilon$ в угле BDC показывает, что в нем $u^\mu \leqslant w^\varepsilon$. Переходя к пределу сначала по μ, а потом по ε в угле BDC без δ-окрестности точки D, получаем неравенство $u(x,t) \leqslant w(x,t)$ почти всюду в BDC, откуда для следа $u(0,t)$ имеем $u(0,t) \leqslant 0$ на DB.

2. Для доказательства выполнения условий (2) воспользуемся методом, впервые, по-видимому, предложенным в ([4]).

Установим вначале, что на Γ_0^+ и Γ_1^+ $|u_x^\mu|$ равномерно по μ ограничен. После этого, умножая (6) на пробную функцию $f(x, t)$, равную нулю на δ-расширениях граничных множеств Γ_0^- и Γ_1^- и отличную от нуля при $t = 0$ и на δ-сужениях множеств Γ_0^+ и Γ_1^+, перебрасывая на f производные с u_t и $a_x(u)$ и одну производную с μu_{xx}, можем в полученном интегральном тождестве перейти к пределу при $\mu \to 0$, причем в силу $|u_x^\mu|\,|_{\Gamma_k^+} \leqslant \mathrm{const}$ интегралы с множителем μ исчезнут. Получится, что $u(x,t)$ удовлетворяет (3) в слабом смысле, а так как ее граничные значения существуют в сильном смысле (как у функции из BV), то они совпадают с (3).

При доказательстве ограниченности u_x^μ на Γ_0^+ и Γ_1^+ построение барьера, ограничивающего эту производную снизу, оказалось наиболее трудоемким местом всей работы и потребовало привлечения некоторых тонких фактов о поведении решений вырождающегося параболического уравнения с разрывным младшим коэффициентом на линии его разрыва. Заметим, что построение барьера как решения линейного или квазилинейного неравенства первого порядка оказывается здесь принципиально невозможным.

Опишем построение барьеров для некоторого промежутка $\Delta = [t_0, t_1] \in \Gamma_0^+$. Для простоты предположим (этого всегда можно добиться), что на нем $\varphi_0(t)$ — монотонно растущая функция. Пусть $\mathfrak{z}(t)$ — монотонная гладкая «согласующая функция»: $\mathfrak{z}(t) = 0$ при $t \geqslant t_0 + \delta$ и $\mathfrak{z}(t_0) = -\varphi_0(t_0) - M$. В качестве барьеров $w^\mu(x, t)$ берутся решения задачи

$$w_t^\mu + bw_x^\mu - \mu w_{xx}^\mu = 0, \quad w^\mu|_{x=0} = \varphi_0(t) + \mathfrak{z}(t), \quad w^\mu|_{x=1} = w^\mu|_{t=t_0} = -M, \tag{8}$$

где $b(x,t)$ — кусочно-постоянный коэффициент, $b(x,t) = b_0$ при $x < (t - t_0 - \delta)\omega$ и $b(x, t) = b_1$ при $x > (t - t_0 - \delta)\omega$, причем постоянные параметры $b_0 > 0$, $b_1 < 0$, $\omega > 0$ для применения принципа максимума к $u^\mu - w^\mu$ надо подобрать так, чтобы при $t > t_0$ было $b(x, t) - a'(w^\mu) \leqslant 0$.

Лемма 3. *При любых постоянных $b_0 > 0$, $b_1 < 0$, $\omega > 0$ решение $w^\mu(x, t)$ задачи (8) стремится к разрывному решению $w^0(x, t)$ соответствующей вырожденной задачи равномерно вне любой окрестности линии разрыва $b(x, t)$, а на линии разрыва $\lim\limits_{\mu\to 0} w^\mu$ существует и имеет место*

$$\lim_{\mu\to 0} w^\mu(\omega t - \omega t_0 - \omega\delta, t) =$$
$$= \frac{(b_0 - \omega)\, w^0(\omega t - \omega t_0 - \omega\delta,\ t + 0) - (b_1 - \omega)\, w^0(\omega t - \omega t_0 - \omega\delta,\ t - 0)}{b_0 - b_1}. \tag{9}$$

Аналогичный факт справедлив и для решения задачи Коши для уравнения (8) с кусочно-постоянным коэффициентом.

Гипотеза: Лемма 3 остается справедливой при отказе от постоянства b_0, b_1 и прямолинейности линии разрыва. Тогда в (9) должны стоять, конечно, локальные значения соответствующих параметров.

Возможность выбора параметра $b_0 < 0$ решающим образом связана с условием $\varphi_0 > \Phi_0(M, A)$. Устанавливается, что $\min\,(u^\mu - w^\mu)$ при $0 \leqslant x \leqslant 1$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ принимается на отрезке $t_0 + \delta \leqslant t \leqslant t_1$ и потому на нем $u_x^\mu \geqslant w_x^\mu$. Но ввиду $b_0 > 0$ граничные значения $w^\mu|_{x=0}$ удерживаются, $w_x^\mu|_{x=0} \geqslant \mathrm{const}$, что и дает нужную оценку снизу для $u_x^\mu|_{\Gamma_0^+}$.

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова

Поступило
15 VI 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] О. А. Олейник, УМН, 10, 3 (65), 229 (1955). [2] А. И. Вольперт, Матем. сборн. 73 (115), 2, 225 (1967). [3] О. А. Олейник, Т. Д. Вентцель, Матем. сб., 41 (83), 1, 105 (1957). [4] О. А. Ладыженская, Вестник ЛГУ, сер. матем., № 7, 104 (1957).