

С. С. ВАЛЛАНДЕР

**О ПРЕДЕЛЬНОМ ПОВЕДЕНИИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ
ИТЕРАЦИЙ НЕКОТОРЫХ КВАДРАТИЧНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ**

(Представлено академиком Ю. В. Линником 23 VI 1971)

1. Пусть $A = \{(x, y, z) \in R^3: x + y + z = 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$. Определим отображения $P, Q, R: A \rightarrow A$ формулами

$$\begin{aligned}P(x, y, z) &= (z^2 + 2yz, y^2 + 2xy, x^2 + 2xz), \\Q(x, y, z) &= (x^2 + 2xz, y^2 + 2xy, z^2 + 2yz), \\R(x, y, z) &= (x^2 + y^2 + 2xz, 2xy, z^2 + 2yz).\end{aligned}$$

Эти отображения принадлежат к числу 97 преобразований, рассмотренных в недоступной работе ⁽¹⁾ (см. ссылку в ⁽²⁾, а также ⁽³⁾). Как можно понять из ⁽²⁾, эти исследования были в основном численными. Мы будем (следуя ⁽¹⁻³⁾) интересоваться поведением итераций этих преобразований. Подобные преобразования возникают в некоторых биологических моделях и описывают эволюцию популяций, состоящих из нескольких типов особей (см. ^(3, 9)). Укажем также работы ^(7, 8), в некоторых рассматривается квадратичное преобразование S симплекса вероятностных мер на полупрямой $[0, \infty)$, описываемое следующим образом. Если μ — распределение каждой из двух независимых неотрицательных случайных величин ξ и η , то $S\mu$ — распределение случайной величины $|\xi - \eta|$. Это преобразование для мер μ , сосредоточенных в трех точках $0, h, 2h$ ($h > 0$), сводится к одному из указанных 97 преобразований. Автор располагает полным описанием предельного поведения итераций в зависимости от начальной точки для 59 из упомянутых 97 отображений (по поводу одного из них см. ⁽⁸⁾). Доказательства соответствующих результатов в некоторых случаях совсем очевидны или получаются путем сравнительно несложных элементарных рассуждений, в других случаях используются различные искусственные приемы.

Среди рассмотренных 59 отображений 56 обладают свойством, что для любой начальной точки итерации сходятся либо к неподвижной точке, либо к периоду. При этом можно точно описать множества начальных данных с тем или иным поведением итераций. В качестве примера мы приводим соответствующие рассуждения для отображений P и R . Значительная часть доказательств для этих 56 преобразований (в том числе и для P) использует вариант теоремы об устойчивом многообразии (см. п. 3г)). В этих случаях основная трудность состоит в сведении задачи к локальной. В некоторых случаях (в том числе и для R) имеются негиперболические неподвижные (или периодические) точки (определение см. п. 2), что делает сходимость итераций более медленной, чем экспоненциальная, и заставляет использовать другие приемы.

Остальные три преобразования (в том числе Q) обладают «предельным циклом» (более подробное описание см. п. 5).

2. Пусть f — локальный диффеоморфизм окрестности точки a евклидова пространства и $f(a) = a$. Следуя Смейлу ⁽⁴⁾, назовем a гиперболической неподвижной точкой, если дифференциал df в точке a не имеет собственных значений, равных 1 по модулю; гиперболическую неподвижную

точку назовем притягивающей (отталкивающей), если все собственные числа по модулю меньше (больше) 1, и седловой, если она не является ни притягивающей, ни отталкивающей. Эти определения мы будем использовать также для любых гладких отображений.

Далее мы используем следующие обозначения: $\text{Int } A = \{(x, y, z) \in A: xyz > 0\}$, $\partial A = A \setminus \text{Int } A$; (x_0, y_0, z_0) — начальная точка, (x_n, y_n, z_n) — точка, получающаяся из нее n -кратным применением P , Q или R (всегда будет ясно, какое именно отображение имеется в виду); P^n , Q^n , R^n — степени P , Q , R .

3. Рассмотрим отображение P . Оно является биекцией $A \rightarrow A$, а также $\text{Int } A \rightarrow \text{Int } A$, $\partial A \rightarrow \partial A$. Нам удобно сформулировать и доказать основной результат для отображения P^2 (переход обратно к P мы опускаем). P^2 имеет 7 неподвижных точек: отталкивающую $(1/3, 1/3, 1/3)$, притягивающие $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ и седловые $\left(0, \frac{\sqrt{5}-1}{2}, \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$, $\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}, 0, \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}, \frac{3-\sqrt{5}}{2}, 0\right)$. Мы докажем, что (x_{2n}, y_{2n}, z_{2n}) всегда сходятся к одной из этих точек. При этом устойчивые многообразия седловых точек (т. е. множества тех (x_0, y_0, z_0) , для которых (x_{2n}, y_{2n}, z_{2n}) сходятся к соответствующей седловой точке) представляют кривые, соединяющие их с точкой $(1/3, 1/3, 1/3)$. Эти кривые и точка делят A на три P^2 -инвариантных открытых в A множества, являющиеся устойчивыми многообразиями притягивающих неподвижных точек. При этом указанные кривые аналитичны в некоторых окрестностях седел.

Доказательство состоит из нескольких пунктов.

а) Если $(x_0, y_0, z_0) \neq (1/3, 1/3, 1/3)$, то $x_n y_n z_n \rightarrow 0$. Действительно, легко проверить, что если $x_0 y_0 z_0 > 0$, то $x_{n+1} y_{n+1} z_{n+1} < x_n y_n z_n$.

б) Если $(x_0, y_0, z_0) \in \partial A$, то (x_{2n}, y_{2n}, z_{2n}) имеет предел. Этот предел является притягивающей неподвижной точкой, если только (x_0, y_0, z_0) не седловая неподвижная точка.

в) Если $(x_0, y_0, z_0) \in \text{Int } A$, то (x_{2n}, y_{2n}, z_{2n}) имеет предел. Действительно, если эта последовательность имеет предельную точку a ($a \in \partial A$ из а)), не совпадающую с седловой, то все точки $P^{2n}a$ для нее предельные. В этом случае из б) легко следует, что a — притягивающая неподвижная точка.

г) Устойчивые многообразия седловых неподвижных точек одномерны. Это следует, например, из ⁽⁵⁾, гл. IX, лемма 5.1.

д) Устойчивые многообразия седел соединяют их с точкой $(1/3, 1/3, 1/3)$. Это легко вывести из неравенства а) и биективности P .

е) Аналитичность устойчивых многообразий седел следует, например, из результатов Пуанкаре (⁽⁶⁾, стр. 238).

Все остальные утверждения легко проверяются.

4. Рассмотрим отображение R . Ограничимся случаем $(x_0, y_0, z_0) \in \text{Int } A$ (учитывая, что $R(\text{Int } A) \subset \text{Int } A$) и докажем, что $(x_n, y_n, z_n) \rightarrow (1/2, 1/2, 0)$ (эта неподвижная точка негиперболическая, кроме нее есть неподвижные точки $(1, 0, 0)$ и $(0, 0, 1)$).

а) Множество $\text{Int } A \cap \{x \geq 1/2\}$ R -инвариантно. Пусть $x_0 \geq 1/2$, тогда $x_1 = 2x_0 - x_0^2 + y_0^2 - 2x_0 y_0 = 1/2 + (\sqrt{2}/2 - y_0 - (\sqrt{2} - 1)x_0) [(\sqrt{2} + 1) \times \times x_0 - y_0 - \sqrt{2}/2]$. Вторая квадратная скобка, очевидно, неотрицательна, а для первой имеем

$$\begin{aligned} \sqrt{2}/2 - y_0 - (\sqrt{2} - 1)x_0 &= \sqrt{2}/2 + (2 - \sqrt{2})x_0 - x_0 - y_0 \geq \\ &\geq 1 - x_0 - y_0 \geq 0. \end{aligned}$$

б) Если $x_0 \geq 1/2$, то $(x_n, y_n, z_n) \rightarrow (1/2, 1/2, 0)$. Это следует из неравенств $y_1 \geq y_0$, $z_1 \leq z_0$.

в) Пусть $x_0 < 1/2$, тогда найдется такое n , что $x_n > y_n$. Действительно, иначе при всех n $y_{n+1} \leq y_n$, $z_{n+1} \geq z_n$ и $(x_n, y_n, z_n) \rightarrow (0, 0, 1)$, но тогда

при $n \geq n_0$ $x_n + 2y_n \leq 1/2$, т. е. при $n \geq n_0$ $x_{n+1} = 2x_n - x_n^2 + y_n^2 - 2x_n y_n \geq x_n(2 - x_n - 2y_n) \geq 3/2 x_n$, и мы пришли к противоречию.

г) Пусть $x_0 < 1/2$, $x_0 > y_0$. Тогда найдется n такое, что $x_n \geq 1/2$. Действительно, иначе при всех n $y_{n+1} \leq y_n$, $z_{n+1} \leq z_n$, т. е. $(x_n, y_n, z_n) \rightarrow (1, 0, 0)$. Противоречие.

5. Рассмотрим отображение Q . Аналогично п. 3а) $x_n y_n z_n \rightarrow 0$, если $(x_0, y_0, z_0) \neq (1/3, 1/3, 1/3)$. В области ∂A Q имеет три (седловые) неподвижные точки $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ и объединение их устойчивых многообразий совпадает с ∂A . Докажем нетривиальную часть последнего утверждения, именно: если $(x_0, y_0, z_0) \in \partial A$, то нет сходимости к неподвижной точке (это следует из теоремы об устойчивом многообразии, но будет полезно более подробное описание). Пусть $x_0 \geq y_0 \geq z_0$ (мы увидим сейчас, что это ограничение несущественно). Тогда $x_1 \leq x_0$, $y_1 \geq y_0$, $z_1 \leq z_0$, $x_1 \geq z_1$. Это легко вывести из определения Q . Отсюда следует, что за конечное число итераций мы попадаем в область $y \geq x \geq z$. Аналогичные рассуждения показывают, что через несколько итераций мы перейдем в область $y \geq z \geq x$, затем последовательно в области $z \geq y \geq x$, $z \geq x \geq y$, $x \geq z \geq y$ и, наконец, снова в $x \geq y \geq z$. После этого все повторяется сначала. Другими словами, (x_n, y_n, z_n) приближается к ∂A по спирали с бесконечным числом оборотов. Из того, что $x_n y_n z_n \rightarrow 0$, легко вывести, что «время полного оборота» неограниченно растет. Множество предельных точек последовательности (x_n, y_n, z_n) бесконечно, однако автору неизвестно, совпадает ли оно с ∂A . Можно доказать, что «почти все время» итерации проводят вблизи неподвижных точек, т. е. что для всякого $\varepsilon > 0$ количество тех номеров $k \leq n$, для которых (x_k, y_k, z_k) отстоит от каждой неподвижной точки более чем на ε , есть $o(n)$.

Итерации двух других преобразований, обладающих «предельным циклом», ведут себя в точности так же, как итерации Q (эти преобразования таковы, что их кубы совпадают с Q^3).

Автор выражает искреннюю благодарность проф. И. А. Ибрагимову за полезные обсуждения и постоянное внимание к работе.

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова

Поступило
10 VI 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Menzel, Stern, Ulam, Los Alamos Report LA-2305, May, 1959. ² P. R. Stein, S. M. Ulam, Rozpr. Math., Warszawa, 39 (1964). ³ С. Улам, Нерешенные математические задачи, М., 1964. ⁴ S. Smale, Bull. Am. Math. Soc., 73, 747 (1967). ⁵ Ф. Хартман, Обыкновенные дифференциальные уравнения, М., 1970. ⁶ А. Пуанкаре, О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями, М.—Л., 1947. ⁷ С. С. Валландер, И. А. Ибрагимов, Н. Г. Линдтроп, Теория вероятн. и ее примен., 14, 4, 693 (1969). ⁸ С. С. Валландер, Вестн. Ленингр. ун-в. (1972). ⁹ H. Kesten, Adv. Appl. Prob., 2, № 1, 1 (1970); № 2, 179 (1970).