

А. М. ВЕРШИК, Л. Д. ФАДДЕЕВ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ
И ЛАГРАНЖЕВА МЕХАНИКА СО СВЯЗЯМИ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 21 VI 1971)

Использование глобальной геометрии оказалось чрезвычайно плодотворным для анализа основ классической механики. Например, гамильтонова механика полностью аксиоматизирована в терминах симплектической структуры (¹⁻³). Более широкой, однако, является лагранжева формулировка механики, использующая пространство координат-скоростей, т. е. касательный пучок. Понятия сил, связей и т. д. находят место именно в этой формулировке. Это обстоятельство и побудило нас пересмотреть в инвариантной форме ее основные понятия.

В настоящей работе вводится ряд, по-видимому, новых дифференциально-геометрических объектов, возникших при таком осмыслении, и дается их механическое истолкование. (Более подробное обсуждение этих определений и формулировок будет дано в другом месте.)

Развитый формализм оказывается особенно полезным при изложении неголономной механики и, как ни странно, приводит к новым результатам. Мы покажем, например, что свободное движение системы, кинетическая энергия которой квадратична по скоростям, а связи линейны по скоростям, происходит по геодезическим для некоторой линейной связности.

1. Структуры в касательном пучке. Пусть $Q = \{q\}$ — гладкое многообразие, $TQ = \{(q, v)\}$ — его касательный пучок, а π — каноническая проекция $\pi(q, v) = q$. Естественно определяются горизонтальные 1-формы и вертикальные векторные поля на TQ . Вертикальное подпространство касательного пространства к многообразию TQ в точке (q, v) естественно отождествляется с касательным пространством многообразия Q в точке q , так что определен мономорфизм $\gamma_{q,v}: T_q \rightarrow T_{(q,v)}$. Обозначим через Φ и назовем основным вертикальным полем векторное поле на TQ , задаваемое формулой $\Phi_{(q,v)} = \gamma_{(q,v)}v$.

Фундаментальное значение имеет операция τ в TQ ((1,1)-тензор) над 1-формами: $\tau = d\pi^*\gamma^*$. Очевидно, ядро и образ τ состоят из горизонтальных форм. В локальных переменных: $\Phi_{q,v} = v \partial / \partial v$, $\tau(a dq + b dv) = b dq$. Специальным называется векторное поле X на TQ такое, что $\tau_*X = \Phi$ (или $d\pi X_{(q,v)} = v$).

Пусть L — гладкая функция на TQ . Построим 2-форму $\Omega_L = d[\tau(dL)]$ и функцию $H_L = dL(\Phi) - L$. Предположим, что L такова, что Ω_L невырождена. Тогда формула $\Omega_L(\Pi_L(\omega), Y) = \omega(Y)$ для произвольных Y и ω определяет отображение Π_L 1-форм в векторные поля (или антисимметричный (2,0)-тензор). Π_L невырожденным образом переводит горизонтальные формы в вертикальные векторные поля. Отображение (симметричный (2,0)-тензор) $\Gamma_L = \Pi_L\tau = -\tau^*\Pi_L$ назовем гессианом. Ядро Γ_L в пространстве 1-форм состоит из горизонтальных форм. Гессиан назовем положительным, если он положителен на соответствующем факторпространстве.

Утверждение 1. Векторное поле $X_L = \Pi_L(d\Pi_L)$ специально.

Утверждение 2. Форма $F_{L,X} = \Pi_L^{-1}(X) - dH_L$ горизонтальна тогда и только тогда, когда X специально.

2. Начала лагранжевой механики. Раскроем механический смысл приведенных построений. Многообразие Q — это конфигурационное пространство системы, а TQ — фазовое пространство (в гамильтоновой механике под фазовым пространством понимают кокасательный пучок T^*Q). Всякое специальное векторное поле X естественно называть полем виртуального перемещения. Далее, L — функция Лагранжа, H_L — функция Гамильтона. Траектории механической системы, определяемой лагранжианом L , являются интегральными кривыми векторного поля X_L , а уравнения $\dot{\xi} = X_L$ ($\xi = (q, v)$) суть уравнения Лагранжа.

Всякую горизонтальную 1-форму F на TQ можно рассматривать как силу, а интеграл $\int_{\rho\alpha} F$, где $\rho\alpha$ — каноническое поднятие кривой $\alpha: [0, 1] \rightarrow Q$ в TQ , есть работа силы F вдоль кривой α . Форму $F_{L, X}$, где X — специальное векторное поле, можно называть лагранжевой силой вдоль виртуального перемещения X . Уравнение $F_{X, L} = 0$ относительно X есть инвариантная форма принципа Даламбера: *лагранжева сила вдоль действительного перемещения равна нулю*.

3. Допустимые распределения в касательном пучке. Пусть S — распределение (дифференциальная система) на TQ , а кораспределение $S^\perp$ — его аннулятор. Назовем S допустимым, если всюду размерность $\tau S^\perp$ совпадает с размерностью $S^\perp$, т. е. если $S^\perp$ не содержит горизонтальных форм. Для допустимости S необходимо, чтобы $\dim S \geq \dim Q$.

Теорема 1. Пусть L — гладкая функция, форма Ω_L невырождена, гессиан Γ_L положителен и пусть S — допустимое распределение.

Существует единственная горизонтальная форма $\bar{\omega} \in \tau S^\perp$ такая, что векторное поле $X_{L, S} = X_L + \Pi_L(\bar{\omega})$ специально и принадлежит S .

Доказательство. Будем искать $\bar{\omega}$ в виде $\bar{\omega} = \tau\omega_0$, $\omega_0 \in S^\perp$. Поле $X_{L, S}$ принадлежит S , если $(X_{L, S}, \omega) = 0$ для всех $\omega \in S^\perp$, т. е. если $\omega(\Pi_L(\tau\omega_0)) = -\omega(X_L)$ или $\Gamma_L(\omega_0, \omega) = -\omega(X_L)$. Квадратичная форма в левой части не вырождена на $S^\perp$ в силу допустимости S и положительности Γ_L . Тем самым последнее уравнение однозначно определяет форму ω_0 . Специальность $X_{L, S}$ следует из специальности X_L и вертикальности $\Pi_L(\bar{\omega})$.

4. Механика со связями. Механическая связь обычно задается как подмногообразие M в TQ , например, как множество нулей системы функций от (q, v) . Возьмем в качестве S распределение на TQ , составленное из подпространств, касательных к этому подмногообразию. Если коразмерность M в каждой точке совпадает с коразмерностью пересечения пространства, касательного к M в этой точке, и вертикального подпространства, то связь допустима. Наиболее часто встречаются так называемые линейные связи, задаваемые распределением A на Q . Соответствующее подмногообразие (подпучок) M в TQ образовано точками (q, v) , где $v \in A_q$. Линейные связи всегда допустимы. Таким образом, классические случаи укладываются в предлагаемую общую схему.

Под связью в наиболее широком смысле удобно понимать произвольное допустимое распределение S на TQ . Реакцией связи называется горизонтальное кораспределение $\tau S^\perp$. В случае линейной связи, задаваемой распределением A на Q , $\tau S^\perp = (d\pi)^* A^\perp$. Произвольная форма, принадлежащая $\tau S^\perp$, называется силой реакции связи. Уравнение $F_{L, X} = (\Pi_L^{-1}(X) - dH_L) \bar{\omega}$ относительно X вместе с условием $X \in S$ есть выражение обобщенного принципа Даламбера: *лагранжева сила на действительном перемещении равна силе реакции связи, вынуждающей систему удовлетворять условиям связи*. Теорема 1 дает условие существования такой силы.

Уравнение $\dot{\xi} = X_{L, S}$, где векторное поле $X_{L, S}$ построено в п. 3, есть уравнение движения для механической системы со связями.

5. Интеграл энергии. Связь называется идеальной, если ра-

бота сил реакции связи равна нулю. Условие идеальности для связи, задаваемой подмногообразием M , можно записать в виде $(\Phi, S^\perp)|_M = 0$. Отсюда вытекает

Утверждение 3. *Связь, задаваемая как подмногообразие нулей системы функций на TQ , идеальна, если эти функции однородны по скоростям. В частности, линейная связь всегда идеальна.*

Теорема 2. *Механическая система с идеальными связями допускает интеграл энергии.*

Доказательство. $\dot{H} = dH_L(X_{L,s}) = \Omega(X_{L,s}, X_{L,s}) - \bar{\omega}(X_{L,s}) = 0$.

6. Наиболее интересен пример механической системы, для которой $L = T - V$, где T — положительная квадратичная форма скоростей, определяющая риманову метрику $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$ на Q : $\langle v, v \rangle = 2T$, а V — функция на Q . В этом случае $H = T + V$, а лагранжова сила распадается на два слагаемых $F_{L,x} = F_{T,x} + F_{V,x}$, где $-F_{V,x} = (d\pi)^*dV$ и не зависит от X , а $F_{T,x}$ можно назвать силой инерции вдоль X . Действительное перемещение X_L также представляется в виде суммы $X_L = X_T + X_V$, где X_T — поле геодезического потока, а $X_V = \gamma(\text{grad } V)$.

Пусть теперь задана линейная связь как распределение A на Q . Силы $\bar{\omega}$ — реакции связи (см. п. 3) ищутся из условия $-(\nabla_v a, v) = \langle \bar{\omega}_T, a \rangle$ для всех $a \in A^\perp$, $\bar{\omega} = \bar{\omega}_T + \bar{\omega}_V$, где $\bar{\omega}_V$ — риманова проекция dV на $A^\perp$; здесь ∇ — ковариантное дифференцирование. Отсюда ясно, что (в случае $V = 0$) формула $\bar{\nabla}_v = \nabla_v + N$, где N — подходящий тензор, определяет новую (не риманову, вообще говоря) связность, поле геодезического потока которой есть $X_{T,s} = X_T + \Pi_T(\bar{\omega})$, а $X_{L,s} = X_{T,s} + X_V$.

Очень интересен следующий пример. Пусть G — группа Ли, в алгебре Ли которой задана положительная квадратичная форма и линейное подпространство; разнесем и то, и другое с помощью левого сдвига по всем точкам G . Проблема нахождения геодезических соответствующей системы со связями включает самую общую задачу о качении.

7. Вопросы. А. Механическую систему со связями (как подмногообразием M в TQ) назовем абсолютно не голономной, если любые две точки $q_1, q_2 \in Q$ можно соединить кусочно-гладкой кривой, поднятие которой лежит в M . Если связи линейны, то достаточным условием абсолютной не голономности служит абсолютная неинволютивность распределения задающего связь (теорема Фробениуса). Обратное, вообще говоря, неверно. Заметим, что обычное деление задач со связями на голономные и не голономные не учитывает «степени не голономности». Предыдущее изложение никак не использовало этих понятий.

Б. Выше показано, что механика с линейными связями и геометрия линейных связностей тесно между собой связаны. Нельзя ли определить группы голономии не голономных механических систем?

В. Как охарактеризовать возникающие связности? Когда получающийся геодезический поток является решением некоторой другой задачи уже без связей?

Мы исходили в этой работе из локального принципа механики. Связь с вариационными принципами в инвариантной форме будет рассмотрена позже.

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова

Поступило
16 IV 1971

Ленинградское отделение
Математического института им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ В. И. Арнольд, Лекции по классической механике, М., 1967. ² R. Abraham, Foundations of Mechanics, N. Y., 1967. ³ С. Стернберг, Лекции по дифференциальной геометрии, М., 1970.