

А. Я. ПРЕССМАН, Ю. З. СОМИНСКИЙ
О ВЫПАДЕНИИ НЕОДНОРОДНЫХ ПРИМЕСЕЙ
ИЗ АТМОСФЕРНЫХ ИСТОЧНИКОВ

(Представлено академиком Е. К. Федоровым 26 XI 1970)

Практически все примеси, выпадающие на подстилающую поверхность из атмосферных источников, в той или иной степени неоднородны по размерам и форме частиц, а значит, и по скорости падения. Для описания плотности распределения массы полидисперсной примеси по установившимся скоростям падения частиц w удобно использовать двухпараметрическую функцию

$$N(w) = \frac{a^{n+1}}{\Gamma(n+1)} w^n e^{-aw} \quad (n > -1, a > 0), \quad (1)$$

хорошо описывающую реальные примеси с «одногогорбым» распределением. При $n > 0$ распределение (1) имеет максимум при $w = n/a = w_m$ и тогда (1) можно представить в виде

$$N(w) = \frac{n^{n+1}}{\Gamma(n+1) w_m} \left[\frac{w}{w_m} e^{-w/w_m} \right]^n \quad (2)$$

В распределении (2) параметр n характеризует степень однородности примеси. На рис. 1 показан график $N(w)$ при различных значениях n . Чем больше n , тем большая доля вещества примеси сосредоточена на частицах со скоростями падения w , близкими к w_m . В предельном случае при $n \rightarrow \infty$ распределение (2) описывает однородную примесь, все частицы которой падают с одной и той же скоростью $w = w_m$. При этом $N(w)$ стремится к $\delta(w - w_m)$ — несимметричной дельта-функции. Закономерностям выпадения такой монодисперсной примеси посвящено много работ. С другой стороны в (1, 2) рассмотрен вопрос о распространении при-

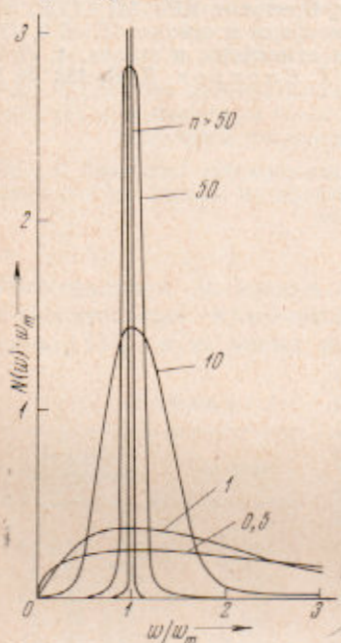


Рис. 1

месей с весьма большой неоднородностью скоростей падения частиц, т. е. случай малых n . В данной работе рассмотрен общий случай и сделана попытка дать полное описание выпадения полидисперсных примесей в рамках выбранной модели рассеяния для всех n .

Сначала рассмотрим выпадение примесей, близких к однородным, т. е. с достаточно большим (но не бесконечно большим) значением n , и выясним пределы применимости классических формул полуэмпирической теории диффузии монодисперсной примеси к описанию реальных примесей, считающихся монодисперсными, но практически обладающими известной неоднородностью.

В качестве исходного выражения рассмотрим поток однородной примеси на подстилающую поверхность ($z = 0$)

$$P(x, y, t; w) = K_z \frac{\partial c}{\partial z} \Big|_{z=0} = \\ = \frac{1}{8} \frac{QH}{\pi^{1/2} t^{1/2} (K_x K_y K_z)^{1/2}} \exp \left[-\frac{(x-ut)^2}{4K_x t} - \frac{y^2}{4K_y t} - \frac{(H-wt)^2}{4K_z t} \right], \quad (3)$$

где x, y — горизонтальные координаты на плоскости $z=0$; u — постоянная скорость ветра, направленная вдоль оси x ; K_x, K_y, K_z — коэффициенты фиковского рассеяния примеси в турбулентной атмосфере; t — время рассеяния; $c(x, y, z, t; w)$ — объемная концентрация однородной примеси, являющаяся решением уравнения полуэмпирической теории турбулентной диффузии ⁽³⁾

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u \frac{\partial c}{\partial x} - w \frac{\partial c}{\partial z} = K_x \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + K_y \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + K_z \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} \quad (4)$$

при начальном условии $c = Q\delta(x)\delta(y)\delta(z)(z-H)$ (мгновенный точечный источник, расположенный на высоте $z=H$ и выделивший количество примеси Q) и краевом условии полного поглощения примеси на подстилающей поверхности $c=0$ при $z=0$, естественном, например, для «тяжелых» частиц.

Если в источнике образовалась полидисперсная примесь с плотностью распределения по скоростям падения $N(w)$, то, очевидно, поток неоднородной примеси при $z=0$ получится после интегрирования выражения (3) вместе с $N(w)$ по w от 0 до ∞ :

$$P(x, y, t) = \frac{QH}{8\pi^{3/2} t^{3/2} (K_x K_y K_z)^{1/2}} \exp \left[-\frac{(x-ut)^2}{4K_x t} - \frac{y^2}{4K_y t} - \frac{H^2}{4K_z t} \right] \cdot J(t), \quad (5)$$

$$J(t) = \frac{V\pi}{2} \left(\frac{n}{V\tau} \right)^{n+1} e^{z_0^2} i_n \operatorname{erfc}(\zeta), \quad (6)$$

$i_n \operatorname{erfc}(\zeta)$ — интегральная функция ошибок (4), $\zeta = \frac{n-h}{2\sqrt{\tau}} = \frac{n-h}{w_m} \sqrt{\frac{K_z}{t}}$

$h = Hw_m / (2K_z)$, $\tau = w_m^2 t / (4K_z)$ — основные, наряду с n , безразмерные параметры задачи, соотношение которых определяет вид выражения (6).

В (4) описано представление сходящимися и асимптотическими рядами функций $i_n \operatorname{erfc} \zeta$ для действительных ζ и n . Для получения выводов о целесообразности применения того или иного разложения в зависимости от соотношения между указанными физическими параметрами проведем там, где это необходимо, дополнительное исследование асимптотических представлений $i_n \operatorname{erfc} \zeta$.

1. $n \gg h$. В этом случае асимптотически $i_n \operatorname{erfc} \zeta$ выражается с помощью формулы (5) из (4), так как здесь и индекс n , и аргумент $\zeta = n(1-h/n) / (2\sqrt{\tau})$ достаточно велики. После некоторых преобразований получим

$$J(t) \simeq e^{-z_0^2/(1-h/n)^2} (1-h/n)^{-(n+1)} \left[1 + \frac{1}{6n} \left(1 - 11 \frac{2\tau}{(1-h/n)^2} + 3 \frac{4\tau^2}{(1-h/n)^4} \right) \right], \quad (7)$$

откуда (5) примет вид

$$P(x, y, t) = \frac{QH}{8\pi^{3/2} t^{3/2} (K_x K_y K_z)^{1/2}} \times \quad (8)$$

$$\times \exp \left[-\frac{(x-ut)^2}{4K_x t} - \frac{y^2}{4K_y t} - \frac{(H-w_m t)^2}{4K_z t} \right] \left[1 + \frac{1}{6n} \left[1 - 11 \frac{w_m^2 t}{2K_z} - 3 \frac{w_m^4 t^2}{4K_z^2} \right] \right].$$

Как легко заметить, главный член (8) тождествен (3), и малость второго члена в фигурных скобках в (7) является необходимым условием применимости формулы монодисперсной примеси (3) для описания не вполне однородных примесей, у которых $1 \ll n < \infty$.

2. $n > h$, ζ сравнительно велико. В этом случае используется асимптотическое представление функции $i_n \operatorname{erfc} \zeta$ в соответствии с формулой (4) из (4):

$$i_n \operatorname{erfc}(\zeta) \simeq \frac{2e^{-\zeta^2}}{\sqrt{\pi} (2\zeta)^{n+1}} \left[1 + \sum_{k=1}^N \frac{(-1)^k}{k!} \frac{\Gamma(1+n+2k)}{\Gamma(1+n)} (2\zeta)^{-2k} \right]. \quad (9)$$

Очевидно, главный член (9) будет асимптотическим выражением для $i_n \operatorname{erfc} \xi$ при достаточно больших ξ , если в разложении (9) члены с номером от $k=1$ до $k=N$ убывают и по модулю меньше 1. Обозначая k -й член разложения (9) через b_k и рассматривая отношение $|b_k/b_{k-1}| = (n+2k-1)(n+2k)/k(2\xi)^2 = (k+1/2(n-1))(k+1/2n)/(k\xi^2)$ как непрерывную функцию k , нетрудно убедиться, что $|b_k/b_{k-1}|$ имеет минимум при $k=k_* = \sqrt{n(n-1)}/2$. Потребовав, чтобы $|b_k/b_{k-1}| < 1$, получим значения k_1 и k_2 ,

$$k_{1,2} = 1/2 \{ \xi^2 + 1/2 - n \mp \sqrt{(\xi^2 + 1/2)^2 - 2n\xi^2} \}, \quad (10)$$

такие, что при $k_1 < k < k_2$ будет $|b_k| < |b_{k-1}|$.

Таким образом, если $k_1 < 1$ (т. е. уже второй член разложения (9) меньше первого), $b_1 = (n+1)(n+2)/[4!(2\xi)^2] < b_0 = 1$ или $\xi^2 > 1/4(n+1)(n+2)$, то точность приближения $i_n \operatorname{erfc} \xi$ главным членом разложения (9) может оцениваться с помощью отрезка ряда (9) $1 \leq k \leq N$, где N , согласно (10), равно целой части k_2 (см. формулу (10) знак «+» перед корнем) и является номером наименьшего по модулю члена ряда (9). Тогда, после упрощений

$$J(t) \simeq (1-h/n)^{-(n+1)} \sum_{k=0}^N \frac{(-1)^k}{k!} \frac{\Gamma(1+n+2k)}{\Gamma(1+n)} \frac{\tau^k}{(n-h)^{2k}},$$

откуда

$$P(x, y, t) = \frac{QH}{8\pi^{3/2} t^{3/2} (K_x K_y K_z)} \exp \left[-\frac{(x-ut)^2}{4K_x t} - \frac{y^2}{4K_y t} - \frac{H^2}{4K_z t} \right] \times \\ \times \left[1 - \frac{Hw_m}{n2K_z} \right]^{-(n+1)} \left\{ 1 + \sum_{k=1}^N \frac{(-1)^k}{k!} \left(\frac{tw_m^2}{4K_z} \right) \left(1 - \frac{Hw_m}{n2K_z} \right)^{-2k} \prod_{s=0}^{2k} \left(1 + \frac{s}{n} \right) \right\}. \quad (11)$$

3. $n \geq h$, ξ сравнительно невелико. При таком соотношении между параметрами $i_n \operatorname{erfc} \xi$ выражается всюду сходящимся рядом (формула (3) из (4))

$$i_n \operatorname{erfc}(\xi) = \frac{e^{-\xi^2}}{\sqrt{\pi} \Gamma(1+n)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \Gamma\left(\frac{1+n-k}{2}\right) (2\xi)^k, \quad (12)$$

откуда

$$J(t) = \frac{1}{2} \frac{n^{n+1}}{\Gamma(n+1)} \tau^{-(n+1)/2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \Gamma\left(\frac{1+n-k}{2}\right) \left(\frac{n-h}{\sqrt{\tau}}\right)^k, \\ P(x, y, t) = \frac{|QH|}{16\pi^{3/2} t^{3/2} (K_x K_y K_z)^{1/2}} \exp \left[-\frac{(x-ut)^2}{4K_x t} - \frac{y^2}{4K_y t} - \frac{H^2}{4K_z t} \right] \times \\ \times \frac{n^{n+1}}{\Gamma(n+1)} \left(\frac{4K_z}{w_m^2 t}\right)^{(n+1)/2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \Gamma\left(\frac{1+n-k}{2}\right) \left(\frac{4K_z}{w_m^2 t}\right)^{k/2} \left(n - \frac{Hw_m}{2K_z}\right)^k. \quad (13)$$

4. $n \leq h$, $-\xi = \eta$ сравнительно невелико. Выражение для $P(x, y, t)$ получается из (13) переменной знака в последней скобке под знаком суммы, тогда ряд становится знакопостоянным.

5. $0 \leq n < h$, $-\xi = \eta$ сравнительно велико. Здесь, как и в случае 2, воспользуемся асимптотическим представлением $i_n \operatorname{erfc}(-\eta)$ (см. (4)):

$$i_n \operatorname{erfc}(-\eta) \simeq \frac{2^n \eta}{\Gamma(1+n)} \sum_{k=0}^N \frac{\Gamma(1+n)}{k! \Gamma(1+n-2k)} (2\eta)^{-2k}, \quad (14)$$

которое нуждается в дополнительном анализе. Вводя обозначения такие же, как в случае 2, и исследуя отношение

$$\frac{b_k}{b_{k-1}} = \frac{(n+2-2k)(n+1-2k)}{k(2\eta)^2} = \left(\frac{n+1}{2} - k\right) \left(\frac{n+2}{2} - k\right) / (k\eta^2)$$

как непрерывную функцию k , легко убеждаемся, что b_k/b_{k-1} имеет два корня: $k_1 = (n+1)/2$ и $k_2 = (n+2)/2$ и отрицательный минимум при $k = k^* = \sqrt{(n+1)(n+2)}/2$. Отсюда следует, что при использовании асимптотического разложения (14) целесообразно ограничиваться его отрезком $0 \leq k \leq N$, где N близко к k_1 или k_2 . При n -целом разложении (14) превращается в полином, обрываясь при $k = N = (n+1)/2$, если n нечетное, или при $k = N = (n+2)/2$, если n четное.

В общем случае, обозначая $n = v + \alpha$, где v — целая часть, а $0 \leq \alpha < 1$, получим для N : $N = (v+1)/2$ при v нечетном и $N = (v+2)/2$ при v четном. В этих случаях $|b_k/b_{k-1}|$ минимален и равен соответственно $\alpha(1+\alpha)/[2(1+v)\eta^2]$ (v нечетное) и $\alpha(1-\alpha)/[2(v+2)\eta^2]$ (v четное). В зависимости от n и η нетрудно отыскать номер $k = m$ наибольшего по модулю члена отрезка асимптотического ряда $0 \leq k \leq N$, если потребовать $b_k/b_{k-1} < 1$.

Если $\eta = \sqrt{n(n-1)}/2$, то $m = 0$ и $J(t)$ представляется в виде

$$J(t) \simeq \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{n^{n+1}}{\tau(n+1)^{1/2}} e^{(h-n)^2/(4\tau)} \frac{2(h-n)^n}{\Gamma(n+1) 2^n \tau^{n/2}} \left\{ 1 + \sum_{k=1}^N \times \right. \\ \left. \times \frac{\Gamma(n+1)}{k! \Gamma(n+1-2k)} \frac{\tau^k}{(h-n)^{2k}} \right\}, \quad (15)$$

откуда

$$P(x, y, t) \simeq \frac{PH}{4\pi \sqrt{K_x K_y t^3}} \left[\exp \left(-\frac{(x-ut)^2}{4K_x t} - \frac{y^2}{4K_y t} \right) \right] \frac{n^{n+1}}{\Gamma(n+1) w_m} \times \\ \times \left[\frac{H}{w_m t} \right]^n \left[1 - \frac{n^2 K_z}{H w_m} \right]^n \left[\exp \left(-\frac{nH}{w_m t} + \frac{n^2 K_z}{w_m^2 t} \right) \right] \times \\ \times \left\{ 1 + \sum_{k=1}^N \frac{\Gamma(n+1)}{k! \Gamma(n+1-2k)} \left[\frac{K_z t}{H^2 \left(1 - \frac{n^2 K_z}{H w_m} \right)} \right]^k \right\}. \quad (16)$$

Из (16) как частный случай при $K_z \rightarrow 0$ вытекают результаты ⁽¹⁾. Анализируя физический смысл полученных выражений, заметим, что 1) необходимо с осторожностью пользоваться выражением для монодисперсных примесей при описании не вполне однородных примесей, следя за выполнением, по крайней мере, необходимого условия малости второго члена асимптотического представления (8);

2) для описания выпадения примеси с большой степенью однородности n и с малой скоростью падения основной фракции w_m при источнике, находящемся на небольшой высоте H , целесообразно использовать выражение (11);

3) выражение (13) удобно для описания выпадения примесей с любой конечной степенью однородности n и сравнительно большими w_m при любых высотах H ;

4) выражение (16) удобно для неоднородных примесей (малые n), выпадающих с достаточно больших высот H и любых конечных w_m ;

5) выпадение неоднородных примесей, большой процент вещества которых сосредоточен на практически не оседающих частицах ($w_m = 0$), рассмотрено в ⁽¹⁾.

Институт прикладной геофизики
Главного управления гидрометеорологической службы
при Совете Министров СССР
Москва

Поступило
6 XI 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ А. Я. Прессман, Инж.-физ. журн., 2, № 11 (1959). ² В. Н. Петров, А. Я. Прессман, ДАН, 146, № 1 (1962). ³ А. С. Монин, Тр. Геофиз. инст. АН СССР, № 33, 160 (1956). ⁴ О. С. Берлянд, А. Я. Прессман, ДАН, 140, № 1 (1961).