Доклады Академии наук СССР
1971. Том 200, № 2

УДК 519.281 **МАТЕМАТИКА**

А. Л. РУХИН

ОБ ОДНОМ СЛУЧАЕ РАСЧЕТА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ИЗМЕРЕНИЯМИ

(Представлено академиком Ю. В. Линником 12 III 1971)

В настоящей заметке рассматривается задача последовательного оценивания параметра $\theta \in R^1$ в стандартной схеме прямых измерений

$$x_i = \theta + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{1}$$

где погрешности ε_i предполагаются независимыми одинаково распределенными случайными величинами с известным законом распределения P. Другими словами, мы занимаемся последовательным оцениванием параметра сдвига θ по данным независимых наблюдений $x_1, x_2, \ldots$, распределенных согласно мере P_θ, $P_\theta(A) = P(A - \theta)$. Если τ — (марковский) момент остановки, а $f_\tau = f_\tau(x_1, \ldots, x_\tau)$ — оценка для θ, построенная на базе наблюдений до момента τ, то ущерб в случае, когда θ есть истинное значение параметра, измеряется неотрицательной функцией потерь $W(f_\tau - \theta, \tau) = W_\tau(f_\tau - \theta)$, математическое ожидание которой

$$R(\delta, \theta) = E_\theta W(f_\tau - \theta, \tau)$$

называется **р и с к о м о ц е н о ч н о й п р о ц е д у р ы** $\delta = (\tau, f_\tau)$.

Мы ограничимся здесь рассмотрением класса инвариантных процедур (τ, f_τ), для которых $\{\tau = n\} \in \mathfrak{B}_n$, $n = 2, 3, \ldots$, где $\mathfrak{B}_n$ — σ-алгебра, порожденная вектором $(x_2 - x_1, \ldots, x_n - x_1)$ и для почти всех $(x_1, \ldots, x_n) \in R^n$, $c \in R^1$, $n = 1, 2, \ldots$,

$$f_n(x_1 + c, \ldots, x_n + c) = f_n(x_1, \ldots, x_n) + c. \tag{2}$$

Ясно, что риск всякой инвариантной процедуры не зависит от θ, в связи с чем можно говорить об оптимальной (относительно выбранной функции потерь) инвариантной процедуре δ_0, для которой

$$R(\delta_0) = \inf_\delta R(\delta).$$

Вопрос о допустимости оптимальной инвариантной оценки в классе всех процедур рассматривался в ([1]).

Легко понять, как оптимально оценивать параметр θ при фиксированном правиле остановки τ. Действительно, пусть существует оптимальная инвариантная оценка $\tilde{f}_n$, т. е.

$$\min_{f_n} E_0 W(f_n - \theta, n) = E_\theta W(\tilde{f}_n - \theta, n),$$

где минимум слева берется по всем инвариантным процедурам. (Эту оценку мы будем называть **о ц е н к о й П и т м а н а**, отвечающей функции потерь W_n.) Нетрудно видеть, что оценка $\tilde{f}_n$ удовлетворяет соотношению

$$E_0\{W_n | \tilde{f}_n(x_1, \ldots, x_n) / \mathfrak{B}_n\} = \inf_{d \in R^1} E_0\{W(x_1 + d) / \mathfrak{B}_n\}. \tag{3}$$

Из (3) выводим, что для любой инвариантной оценки f_n

$$\int\limits_{\{\tau=n\}} W_n(\tilde{f}_n)\,dP \leqslant \int\limits_{\{\tau=n\}} W_n(f_n)\,dP. \tag{4}$$

Если теперь $\tilde{f}_\tau = \tilde{f}_n$, $n = 1, 2, \ldots$, на множестве $\{\tau = n\}$, то из (4) следует, что при фиксированном правиле остановки τ $\min\limits_{f_\tau} R(\tau, f_\tau)$ достигается на $\tilde{f}_\tau$ и, таким образом, проблема выбора оптимальной инвариантной процедуры оценивания состоит в отыскании оптимального правила остановки τ_0.

Эту задачу мы и рассмотрим для так называемых сильно симметричных семейств (см. ([2])), т. е. для симметричных распределений с достаточными статистиками для параметра сдвига ранга не большего двух. Для этих распределений пересечение достаточной σ-алгебры с инвариантной (относительно которого должно быть измеримо правило остановки) порождается одной вещественной статистикой.

Пусть

$$p(x) = \frac{\beta}{2K_0(\alpha)} \exp\{-\alpha \operatorname{ch} \beta x\}, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0, \tag{5}$$

— плотность сильно симметричного закона. Если $\beta \to 0$, $\alpha\beta^2 \to \sigma^{-2}$, то $p(x)$ сходится к плотности нормального закона с дисперсией σ^2, если же $\beta \to \infty$, $\frac{1}{\beta} \log \alpha \to -\Delta$, то пределом (5) является плотность прямоугольного закона на отрезке $(-\Delta, \Delta)$.

Известно (см. ([2])), что оценка Питмана для любой выпуклой и четной функции потерь имеет вид

$$f_n(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{2\beta} \log\left(\sum_1^n e^{\beta x_j} \Big/ \sum_1^n e^{-\beta x_j}\right). \tag{6}$$

Мы рассмотрим функцию потерь

$$W_n(f_n - \theta) = A[\operatorname{sh}^2 \beta(f_n - \theta) + cn], \quad c > 0, \quad A > 0, \quad \beta > 0.$$

Если $\beta \to 0$, $A\beta^2 \to 1$, $Ac \to \lambda$, то $W_n(f_n - \theta) \to (f_n - \theta)^2 + \lambda n$. Если же $\beta \to \infty$, $Ae^{2\beta\Delta} \to 1$, $Ac \to \lambda$, то предел функции W_n совпадает с пределом функций потерь вида $B(r(f_n - \theta) + \lambda n)$, $B \to \infty$, где r — индикаторная функция множества $(-\infty, -\Delta) \cup (\Delta, \infty)$, отвечающих доверительному оцениванию параметра θ с помощью интервалов длины 2Δ. Таким образом, эта мера качества охватывает две классические.

Для нахождения оптимального правила остановки для оценивания параметра сдвига плотностей (5), где параметры α и β предполагаются известными, при указанной функции потерь мы применим некоторые результаты работы ([5]).

Пусть $\tilde{x}_n = E_0\{W_n(f_n) / \mathfrak{B}_n\}$, где f_n — оптимальная оценка θ, определенная в (6). Тогда $E_\theta \tilde{x}_n = E_\theta W_n(f_n - \theta)$ и из леммы 7 работы ([5]) выводим, что если из неравенства $E\{\tilde{x}_{n+1} / \mathfrak{B}_n\} \geqslant \tilde{x}_n$ следует, что $E\{\tilde{x}_{n+2} / \mathfrak{B}_{n+1}\} \geqslant \tilde{x}_{n+1}$, то оптимальное инвариантное правило остановки имеет вид

$$\tau_0 = \min_{n \geqslant 1} \{n\colon E\{\tilde{x}_{n+1}/\mathfrak{B}_n\} \geqslant \tilde{x}_n\}.$$

Вычислив количества $\tilde{x}_n$ и $E\{\tilde{x}_{n+1} / \mathfrak{B}_n\}$, мы покажем, что указанное условие монотонности действительно имеет место, и тем самым построим оптимальное правило остановки.

Имеем

$$\tilde{x}_n = E\{W_n(f_n)/\mathfrak{B}_n\} = \frac{\int W_n(f_n(x_1, \ldots, x_n) - \xi) \prod\limits_1^n p(x_j - \xi)\, d\xi}{\int \prod\limits_1^n p(x_j - \xi)\, d\xi} =$$

$$= A\left[\int \frac{\operatorname{sh}\beta(f_n-\xi)\exp[-\alpha R_n \operatorname{ch}\beta(f_n-\xi)]\,d\xi}{\int \exp[-\alpha R_n \operatorname{ch}\beta(f_n-\xi)]\,d\xi} + cn\right] =$$

$$= A\left[\frac{\int \operatorname{sh}^2\xi \exp[-\alpha R_n \operatorname{ch}\xi]\,d\xi}{2K_0(\alpha R_n)} + cn\right] = A\left[\frac{K_1(\alpha R_n)}{\alpha R_n K_0(\alpha R_n)} + cn\right],$$

где $K_0(\alpha)$, $K_1(\alpha)$ — известные функции Макдональда, $R_n^2 = \sum_1^n e^{\beta x_j} \sum_1^n e^{-\beta x_j}$.

Далее

$$E\{\tilde{x}_{n+1}/\mathfrak{B}_n\} = \frac{\iint \tilde{x}_{n+1}(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) \prod_1^{n+1} p(x_j-\xi)\,d\xi\,dx_{n+1}}{\int \prod_1^n p(x_j-\xi)\,d\xi} =$$

$$= A\left[\frac{\iint \frac{K_1(\alpha R_{n+1})}{R_{n+1}K_0(\alpha R_{n+1})} \exp[-\alpha R_{n+1}\operatorname{ch}\beta\xi]\,d\xi\,dx_{n+1}}{\alpha\int \exp[-\alpha R_n \operatorname{ch}\beta\xi]\,d\xi \cdot 2K_0(\alpha)} + c(n+1)\right] =$$

$$= A\left[\frac{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{K_1(\alpha R_{n+1})}{R_{n+1}}\,dx_{n+1}}{2\alpha K_0(\alpha)\,K_0(\alpha R_n)} + c(n+1)\right]. \tag{8}$$

Здесь $R_{n+1}^2 = R_n^2 + 2R_n \operatorname{ch}\beta x_{n+1} + 1$.

Для расчета интеграла $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{K_1(\alpha R_{n+1})}{R_{n+1}}\,dx_{n+1}$ воспользуемся формулой (см. ([1]), стр. 280)

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} (R_n e^y + 1)^\mu e^{-\nu y} \frac{K_\mu(\alpha R_{n+1})}{R_{n+1}^\mu}\,dy = K_{\mu-\nu}(\alpha)\,K_\mu(\alpha R_n), \tag{9}$$

$R_{n+1}^2 = R_n^2 + 2R_n \operatorname{ch} y + 1$. Полагая в (9) $\mu = \nu = 1$ и $\nu = 0$, $\mu = 1$, находим

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{K_1(\alpha R_{n+1})}{R_{n+1}}\,dx_{n+1} = 2\,\frac{R_n K_0(\alpha)\,K_1(\alpha R_n) - K_1(\alpha)\,K_0(\alpha R_n)}{R_n^2 - 1},$$

так что

$$E\{\tilde{x}_{n+1}/\mathfrak{B}_n\} = \frac{A}{\alpha}\left[\frac{R_n}{R_n^2-1}\,\frac{K_1(\alpha R_n)}{K_0(\alpha R_n)} - \frac{1}{R_n^2-1}\,\frac{K_1(\alpha)}{K_0(\alpha)}\right] + Ac(n+1).$$

Если $\Phi(\alpha) = K_1(\alpha)/K_0(\alpha) = -\frac{d}{d\alpha}\log K_0(\alpha)$, то неравенство $E\{\tilde{x}_{n+1}/\mathfrak{B}_n\} \geqslant \tilde{x}_n$ равносильно

$$R_n\Phi(\alpha) - \Phi(\alpha R_n) \leqslant \alpha c R_n(R_n^2 - 1). \tag{10}$$

Из вогнутости $\Phi(\alpha)R - \Phi(\alpha R)$ как функции от R, $R > 1$, следует, что графики функций $\Phi(\alpha)R - \Phi(\alpha R)$ и $c\alpha R(R^2-1)$, принимающих одинаковое значение при $R = 1$, для $R > 1$ имеют не более одной точки пересечения, которую мы обозначим через R^*. Эта точка действительно существует, когда производная функции $\Phi(\alpha)R - \Phi(\alpha R)$ в точке $R = 1$ больше соответствующего значения производной функции $c\alpha R(R^2-1)$, т. е. если $\Phi(\alpha) - \alpha\Phi'(\alpha) > 2c\alpha$. При выполнении противоположного неравенства наблюдения следует прекращать после первого шага.

Итак, неравенство (10) равносильно тому, что $R_n > R^*$, откуда следует $R_{n+1} > R^*$, так что имеет место монотонный случай и правило остановки

$$\tau_0 = \min_{n \geq 1} \{n\colon\ R_n > R^*\}$$

оптимально в классе инвариантных. Более того, эта, по существу последовательная, процедура потребует с вероятностью 1 не более $[R^*]$ наблюдений.

Теорема. *Оптимальная инвариантная процедура оценивания параметра сдвига* θ *плотности сильно симметричного закона* (5) *при функции потерь* $W_n(\xi) = A[\operatorname{sh}^2 \beta\xi + cn]$, $A, \beta, c > 0$, *имеет вид*

$$\{\tau_0 = n\} = \{R_{n-1} < R^*,\quad R_n \geq R^*\},$$

$$f_n(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{\beta} \operatorname{arth}\Big(\sum_1^n \operatorname{sh} \beta x_j \Big/ \sum_1^n \operatorname{ch} \beta x_j\Big),$$

где $R_n^2 = \Big(\sum_1^n \operatorname{ch} \beta x_j\Big)^2 - \Big(\sum_1^n \operatorname{sh} \beta x_j\Big)^2$, *а* $R^* > 1$ *есть корень уравнения*

$$\frac{K_1(\alpha)}{K_0(\alpha)} R^* - \frac{K_1(\alpha R^*)}{K_0(\alpha R^*)} = c\alpha R^* (R^{*2} - 1)$$

при условии, что $2\alpha c < \Phi(\alpha) - \alpha\Phi'(\alpha)$.

Если $2\alpha c \geq \Phi(\alpha) - \alpha\Phi'(\alpha)$, *то с вероятностью* 1 $\{\tau_0 = 1\}$, $f_1(x_1) = x_1$.

В заключение заметим, что если $\beta \to 0$, $\alpha\beta^2 \to \sigma^{-2}$, то правило остановки принимает вид $\{\tau_0 = n_0\}$ с вероятностью 1, что отвечает известному факту, что для нормального закона оптимальное инвариантное последовательное управление вырождено.

Если $\beta \to \infty$, $\frac{1}{\beta} \log \alpha \to -\Delta$, то соотношение (10) переходит в неравенство

$$(x_{\max}^{(n)} - x_{\min}^{(n)})/(2\Delta) > 1 - \varepsilon,$$

где $x_{max}^n = \max(x_1, \ldots, x_n)$, $x_{min}^n = \min(x_1, \ldots, x_n)$. Это правило остановки, оптимальное для оценивания параметра сдвига прямоугольного распределения, было указано в ([3]).

Согласно общим теоремам Ю. В. Линника и И. В. Романовского об асимптотическом поведении оптимального управления в регулярном случае выигрыш в риске нашей процедуры относительно оптимальной оценки с $P\{\tau = n\} = 1$ равен $O(1/n)$.

Ленинградское отделение
Математического института им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступило
26 II 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. Я. Виленкин, Специальные функции и теория представлений групп, «Наука», 1965. [2] А. Л. Рухин, ДАН, 190, № 2 (1970). [3] А. И. Шалыт, ДАН, 193, № 4 (1970). [4] L. D. Brown, Ann. Math. Statist., 37, 5 (1966). [5] Y. S. Chow, H. Robbins, Zs. Wahrscheinlichkeitstheorie Verw. Gebiete, 2, 1 (1963).