Доклады Академии наук СССР
1971. Том 200, № 5

УДК 513.88+517.948 *МАТЕМАТИКА*

Г. В. РОЗЕНБЛЮМ

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ СОБСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ ПЕРВОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ В НЕОГРАНИЧЕННЫХ ОБЛАСТЯХ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 5 IV 1971)

1. Настоящая работа посвящена исследованию спектра полигармонического оператора в неограниченных областях. Рассматривается класс областей, для которых спектр соответствующей первой краевой задачи дискретен. На случай областей конечного объема распространяются все результаты о главном члене асимптотики собственных значений, полученные для ограниченных областей. Для открытых множеств бесконечного объема получены двусторонние оценки функции распределения собственных чисел. Если область ведет себя на бесконечности достаточно регулярно, то оценки сверху и снизу совпадают по порядку. Результаты работы являются новыми и для оператора Лапласа. Работа в существенном опирается на результаты статей [1, 2]. В [1] разработан метод получения асимптотик, основанный на использовании некоторых новых фактов теории приближения функций и теории возмущения операторов. В [2] получен критерий дискретности спектра первой краевой задачи для полигармонического оператора, а также выведен ряд важных свойств емкости.

2. Ниже принята вариационная постановка задач на собственные значения. Пусть Ω — открытое множество в R^m, ρ — положительная конечная борелевская мера на Ω. Собственными числами первой краевой задачи (задачи $D(\Omega)$) будем называть * последовательные минимумы отношения квадратичных форм

$$\int_\Omega |\nabla^l u|^2\,dx \Big/ \int_\Omega |u|^2 \rho(dx), \quad u \in H^l(\Omega).$$

Если Ω — область с гладкой границей, ρ — абсолютно непрерывная мера с плотностью p, то задача $D(\Omega)$ — это уравнение $(-\Delta)^l u = \lambda p u$ с краевыми условиями Дирихле. Функция распределения собственных чисел обозначается $N(\lambda)$.

Будем говорить, что мера $\rho \in \Gamma_r(\Omega)$, $r > 1$, если она абсолютно непрерывна относительно меры Лебега (обозначаемой mes) и плотность $p \in L_r(\Omega)$; норма $\|\rho\|_{r,\Omega}$, по определению, равна норме p в $L_r(\Omega)$. Класс $\Gamma_1(\Omega)$ — это класс всех конечных мер на Ω с нормой $\|\rho\|_{1,\Omega} = \rho(\Omega)$.

3. Основным этапом в получении асимптотической формулы для собственных значений задачи $D(\Omega)$ так же, как и в [1], является доказательство точных по порядку оценок, равномерных относительно множеств Ω и мер ρ.

Теорема 1. *Пусть Ω — произвольное открытое множество конечной меры в R^m; $\rho \in \Gamma_r(\Omega)$, где $r = 1$ при $2l \geq m$ и $r > m/(2l)$ при $2l < m$. Тогда при всех $\lambda > 0$ имеет место оценка*

$$N(\lambda) < c_1 \lambda^{m/(2l)} \|\rho\|_{r,\Omega}^{m/(2l)} (\operatorname{mes}\Omega)^{1-m/(2lr)}, \tag{1}$$

причем постоянная $c_1 = c_1(m, l, r)$ не зависит ни от множества Ω, ни от меры ρ.

* Подробнее о постановке задач см. [1].

Для доказательства теоремы 1 используется специальное покрытие множества Ω кубами. В каждом кубе рассматривается комбинированная краевая задача, т. е. ставятся условия Дирихле на одной части границы и естественные краевые условия — на другой. Для изучения спектра таких задач используются емкостные соображения и некоторые оценки из ([1]).

Отметим, что теорема 1 верна и для некоторых комбинированных задач.

С помощью теоремы 1 и вариационного принципа удается вывести асимптотику собственных чисел задачи $D(\Omega)$ из соответствующей формулы, полученной в ([1]) для ограниченных множеств.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1.

Тогда имеет место асимптотическая формула

$$N(\lambda) \sim \gamma_m \lambda^{m/(2l)} \int_\Omega p(x)^{m/(2l)} dx, \tag{2}$$

где $\gamma_m^{-1} = (2\sqrt{\pi})^m \Gamma(m/2+1)$.

Следствие 1. *Пусть* ρ — *мера Лебега.*

Тогда

$$N(\lambda) \sim \gamma_m \lambda^{m/(2l)} \operatorname{mes} \Omega. \tag{3}$$

Таким образом, классическая асимптотическая формула (3) верна во всех случаях, когда обе ее части имеют смысл.

4. Перейдем к случаю областей Ω бесконечной меры. Здесь мы ограничимся случаем, когда ρ — мера Лебега.

Емкость (точнее l-гармоническая емкость относительно открытого куба Q) множества F определяется как

$$\operatorname{cap}_Q^l(F) = \inf \left\{ \int_Q |\nabla^l u|^2 dx \right\},$$

где нижняя граница берется по функциям $u \in C_0^\infty(Q)$, равным единице в окрестности множества F (см. ([2])).

Построим для каждого $d > 0$ множество $\Omega(d)$ следующим образом. Наложим на Ω решетку кубов со стороной d. Зафиксируем число $\varkappa < \varkappa_0$ ($\varkappa_0$ определяется размерностью пространства и порядком оператора). Отнесем к классу Ξ_d те кубы Q решетки, для которых $\operatorname{cap}_{\bar{Q}}^l (\bar{Q} \cap R^m \setminus \Omega)) < \varkappa d^{m-2l}$, где $\bar{Q}$ — куб с ребром $2d$, концентрический Q. Множество $\Omega(d)$ определяется как внутренность множества $\Omega \cap \bigcup_{Q \in \Xi_d} \bar{Q}$.

Из критерия В. Г. Мазьи ([2]) следует, что для дискретности спектра первой краевой задачи в Ω необходимо и достаточно, чтобы множество $\Omega(d)$ было ограниченным для любого $d > 0$. Для произвольного открытого множества Ω, удовлетворяющего критерию дискретности спектра, имеет место следующая двусторонняя оценка собственных чисел.

Теорема 3. *Существуют такие постоянные k_1, k_2, k_3, k_4, зависящие от m, l, $\varkappa$, но не зависящие от области Ω, что для любого $\lambda > 0$ верно неравенство*

$$k_1 \lambda^{m/(2l)} \operatorname{mes} \Omega (k_2 \lambda^{-1/(2l)}) < N(\lambda) < k_3 \lambda^{m/(2l)} \operatorname{mes} \Omega (k_4 \lambda^{-1/(2l)}). \tag{4}$$

5. Применение теоремы 3 для получения оценок в конкретных случаях затруднено тем, что результат сформулирован в трудно проверяемых терминах емкости. Неоднозначность выбора числа $\varkappa$ и положения решетки, а также различие констант k_2 и k_4 в неравенстве (4) приводят к тому, что оценки снизу и сверху имеют, вообще говоря, разный порядок. Однако в ряде случаев с помощью теоремы 3 удается получить оценки функции распределения в элементарных терминах и даже выяснить точный порядок.

Следствие 2. *Пусть Ω удовлетворяет условию*

$$\operatorname{mes}(\Omega \cap \{a-1 < |x| < a\}) < c_2 a^{-\beta}, \quad 0 < \beta < 1,$$

для всех $a > 1$.

Тогда верна оценка

$$N(\lambda) \leqslant c_5 \lambda^{m/(2l\beta)}. \tag{5}$$

Оценку (5) улучшить нельзя: если $\Omega \cap \{n-1 < |x| < n\}$ для целых n есть шар объема $c_2 n^{-\beta}$, то (5) даст точный порядок $N(\lambda)$.

Следствие 3. *Введем функцию* $\tau(x) = \operatorname{dist}(x, R^m \setminus \Omega)$. *Пусть для некоторого* $\gamma > 0$ *интеграл* $\int\limits_\Omega \tau(x)^\gamma dx$ *расходится.*

Тогда

$$\overline{\lim}\, N(\lambda)\lambda^{-(m+\gamma-\varepsilon)/(2l)} > 0, \quad \varepsilon > 0.$$

В условиях следствий 2 и 3 более слабые результаты были получены соответственно в ([3]) и ([4]).

Приводимый ниже результат относится к случаю предельно-цилиндрических областей с нулевым радиусом на бесконечности. Именно, пусть G — открытое множество конечной меры в R^{m-1}; $\delta(z)$ — непрерывная положительная функция на R_+^1, $\delta(z) \to 0$ $(z \to \infty)$ и Ω — множество в R^m:

$$\Omega = \{(x', z):\ x' \cdot \delta(z)^{-1} \in G\}.$$

Спектр полигармонического оператора в такой области дискретен.

В ([5]) сформулирован один результат Б. Я. Скачека об асимптотике собственных чисел оператора Лапласа в областях такого вида. Однако примеры показывают, что без дополнительных предположений о скорости убывания $\delta(z)$ этот результат неверен.

Из теоремы 3 вытекает следующая двусторонняя оценка.

Следствие 4. *Пусть* Ω — *предельно-цилиндрическая область с нулевым радиусом на бесконечности и существуют такие числа* $a > 1$ *и* $b < 1$, *что из неравенства* $z_1 > az_2$ *следует* $\delta(z_1) < b\delta(z_2)$.

Тогда $N(\lambda)$ *оценивается снизу и сверху через*

$$\lambda^{m/(2l)} \int\limits_0^{z(c_4\lambda^{-1/(2l)})} \delta(z)^{m-1} dz, \tag{6}$$

где $z(d) = \sup\{z: \delta(z) \geqslant d\}$.

В случае, если $\delta(z) \sim z^{-\alpha}$, где $0 < \alpha < (m-1)^{-1}$, формула (6) дает для $N(\lambda)$ порядок $\lambda^{(1+1/\alpha)/(2l)}$.

В заключение автор выражает благодарность М. З. Соломяку за постановку задачи и внимание к работе.

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова

Поступило
20 III 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк, Функц. анализ, 4, № 4, 1 (1970). [2] В. Г. Мазья, Сиб. матем. журн., 6, № 1, 127 (1965). [3] D. E. Hewgill, Arch. Ration. Mech. Anal., 27, № 3, 153 (1967). [4] C. Clark, Arch. Ration. Mech. Anal., 31, № 5, 352 (1968). [5] И. М. Глазман, Прямые методы качественного спектрального анализа сингулярных дифференциальных операторов, М., 1964, стр. 263.