

Н. Р. СИБГАТУЛЛИН

К ГИПОТЕЗЕ ДИФFUЗНОГО ФОНА ГРАВИТАЦИОННОГО ИЗЛУЧЕНИЯ ВО ВСЕЛЕННОЙ

(Представлено академиком Л. И. Седовым 12 III 1971)

Релятивистские уравнения гравитации могут оказаться существенными для описания гипотетического гравитационного излучения. В настоящей статье гравитационное излучение трактуется как фон от случайных флуктуаций гравитационного поля и учитывается влияние этого фона на эволюцию модели вселенной с осредненными свойствами. Отметим, что авторы статьи ⁽¹⁾ считали флуктуации гравитационного поля имеющими квантовомеханическую природу и предполагали, что среднеквадратичный вклад от флуктуаций метрики в осредненном тензоре Риччи для слабых полей без пульсаций материи можно разложить по степеням тензора Римана — Кристоффеля и его производным. Как и в ⁽²⁾, авторы ⁽¹⁾ предполагали возможную аналогию квантования слабого гравитационного поля с квантованием электромагнитного поля и основывались на анализе характерных величин, получаемых из фундаментальных констант. В нашей статье считается, что флуктуации гравитационного поля имеют не квантовую, а макроскопическую (турбулентную) природу, причем для случайных величин выполняются уравнения Эйнштейна. Относительно фонового добавка в осредненных уравнениях Эйнштейна выводятся дополнительные уравнения. Для их получения используются приемы, аналогичные методам теоретического изучения турбулентной жидкости ⁽³⁾.

Пусть геометрические свойства космологической модели, относительно которой флуктуирует поле, даются метрикой $\bar{g}_{\alpha\beta}$. Если вычислить тензор Риччи для метрики $\bar{g}_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}$, где $h_{\alpha\beta}$ — малые случайные отклонения метрики, то получим (с точностью до членов 3-го порядка по $h_{\alpha\beta}$)

$$R_{\alpha\beta} = \bar{R}_{\alpha\beta} + \delta R_{\alpha\beta} + \delta^2 R_{\alpha\beta} + \dots$$

Здесь $\bar{R}_{\alpha\beta}$ — тензор Риччи, вычисленный по метрике $\bar{g}_{\mu\nu}$,

$$\delta R_{\alpha\beta} = 1/2 (\nabla_\gamma \nabla_\alpha h_\beta^\gamma + \nabla_\gamma \nabla_\beta h_\alpha^\gamma - \nabla_\alpha \nabla_\beta h_\gamma^\gamma - \nabla_\gamma \nabla^\gamma h_{\alpha\beta})^* ;$$

$$\delta^2 R_{\alpha\beta} = -1/2 \nabla_\mu \{ h^{\mu\nu} (\nabla_\alpha h_{\beta\nu} + \nabla_\beta h_{\alpha\nu} - \nabla_\nu h_{\alpha\beta}) \} + 1/2 \nabla_\alpha \nabla_\beta (h_\gamma^\mu h_\mu^\nu) +$$

$$+ 1/4 \nabla_\gamma h_\mu^\mu (\nabla_\alpha h_\beta^\nu + \nabla_\beta h_\alpha^\nu - \nabla^\nu h_{\alpha\beta}) - 1/4 (\nabla_\alpha h_\nu^\mu \nabla_\beta h_\mu^\nu - 2 \nabla_\alpha h_\mu^\mu \nabla_\beta h_\nu^\nu + 2 \nabla_\mu h_\alpha^\mu \nabla_\beta h_\nu^\nu).$$

При осреднении тензора Риччи линейный член выпадает и получаем

$$\langle R_{\alpha\beta} \rangle = \bar{R}_{\alpha\beta} + \langle \delta^2 R_{\alpha\beta} \rangle$$

(операция осреднения должна обладать естественными свойствами: $\langle a+b \rangle = \langle a \rangle + \langle b \rangle$; $\langle \nabla_a b \rangle = \nabla_a \langle b \rangle$). Осредненные уравнения Эйнштейна имеют вид

$$\bar{R}_{\alpha\beta} + \bar{g}_{\alpha\beta} \bar{R} + \langle \delta^2 R_{\alpha\beta} \rangle + \langle h_{\alpha\beta} \delta R \rangle + \bar{g}_{\alpha\beta} \langle \delta^2 R \rangle = \kappa \langle T_{\alpha\beta} \rangle. \quad (1)$$

Для нахождения дополнительных условий на среднеквадратичные добавки от флуктуаций в уравнениях (1) введем в рассмотрение корреля-

* Здесь и ниже ковариантное дифференцирование производится по метрике «сглаженного» поля $g_{\mu\nu}$, греческие индексы пробегают 0, 1, 2, 3.

ционные функции $G_{\beta|\delta}^{\alpha|\gamma}(x, x')$ как средние от произведений функций h_{β}^{α} в точке x и h_{δ}^{γ} в точке x' : $G_{\beta|\delta}^{\alpha|\gamma}(x, x') = \langle h_{\beta}^{\alpha}(x), h_{\delta}^{\gamma}(x') \rangle$. Легко усмотреть, что фоновые добавки в (1) выражаются через функции $G_{\beta|\delta}^{\alpha|\gamma}$ и их производные до 2-го порядка включительно при $x = x'$.

Выберем для определенности во флуктуирующем гравитационном поле обобщенную гармоническую систему Ланцоша — Дондера $\nabla_{\alpha} h_{\beta}^{\alpha} - 1/2 \nabla_{\beta} h_{\alpha}^{\alpha} = 0$. Под ковариантной производной $\nabla_{\alpha} G_{\beta|\delta}^{\alpha|\gamma}$ условимся понимать выражение $\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} G_{\beta|\delta}^{\alpha|\gamma} + \Gamma_{\mu\alpha}^{\alpha} G_{\beta|\delta}^{\mu|\gamma} - \Gamma_{\mu\alpha}^{\mu} G_{\beta|\delta}^{\alpha|\gamma}$. Уравнения для $G_{\beta|\delta}^{\alpha|\gamma}$ получим, умножая уравнения $\delta R_{\beta}^{\alpha} - 1/2 \delta_{\beta}^{\alpha} \delta R = \kappa \delta T_{\beta}^{\alpha}$ для случайных функций в точке x на h_{δ}^{γ} в точке x' , и затем осредним. Имеем

$$\begin{aligned} 1/2 [- \nabla_{\alpha} \nabla^{\alpha} (G_{\beta|\delta}^{\alpha|\gamma} - 1/2 \delta_{\beta}^{\alpha} G_{\alpha|\delta}^{\alpha|\gamma}) - 2 \hat{R}_{\mu\alpha}^{\alpha\gamma} G_{\beta|\delta}^{\mu|\gamma} + \hat{R}_{\mu}^{\alpha} G_{\beta|\delta}^{\alpha|\gamma} - \\ - \hat{R}_{\mu}^{\mu} G_{\beta|\delta}^{\alpha|\gamma} + \delta_{\beta}^{\alpha} \hat{R}_{\mu}^{\mu} G_{\alpha|\delta}^{\mu|\gamma}] = \kappa \langle \delta T_{\beta}^{\alpha}(x), h_{\delta}^{\gamma}(x') \rangle. \end{aligned} \quad (2)$$

Из координатных условий получаем

$$\nabla_{\mu} G_{\alpha|\delta}^{\mu|\gamma} - 1/2 \nabla_{\alpha} G_{\mu|\delta}^{\mu|\gamma} = 0.$$

В общем случае анализ системы для взаимокорреляции пульсаций геометрии и вещества весьма труден. Ограничимся случаем, когда характерный масштаб l этих корреляций много меньше масштаба L изменений «сглаженных» величин $\hat{g}_{\mu\nu}$: $\hat{R}_{\beta}^{\alpha} \lesssim 1/L^2$. При нахождении функций $G_{\beta|\delta}^{\alpha|\gamma}$ в этом случае можно считать турбулентность почти однородной и воспользоваться методом малого параметра:

$$G(x, x') = {}^{(0)}G\left(\frac{x-x'}{l}, \frac{x}{L}\right) + {}^{(1)}G\left(\frac{x-x'}{l}, \frac{x}{L}\right) \frac{l}{L} + {}^{(2)}G\left(\frac{x-x'}{l}, \frac{x}{L}\right) \frac{l^2}{L^2} + \dots$$

Здесь аргумент $(x^{\gamma} - x'^{\gamma})/l$ является «быстрой» переменной, а x^{ν}/L — «медленной»: по аргументу x^{ν}/L функции ${}^{(A)}G$, $A = 0, 1, 2, \dots$, изменяются как сглаженные функции $\hat{g}_{\alpha\beta}$. Обозначим производную по аргументу $(x^{\gamma} - x'^{\gamma})/l$ через ∂_{γ} , производные по медленным аргументам, по-прежнему, будем обозначать через ∇ . Имеем

$$\begin{aligned} \nabla_{\gamma} {}^{(A)}G &= \frac{1}{L} \left({}^{(A)}\Phi_{\gamma 0} + {}^{(A)}\Phi_{\gamma 1} \frac{l}{L} + {}^{(A)}\Phi_{\gamma 2} \frac{l^2}{L^2} + \dots \right); \\ \partial_{\gamma} {}^{(A)}G &= \frac{1}{l} \left({}^{(A)}\Psi_{\gamma 0} + {}^{(A)}\Psi_{\gamma 1} \frac{l}{L} + \dots \right). \end{aligned}$$

Поэтому выражение $\langle \delta R_{\beta}^{\alpha}(x), h_{\delta}^{\gamma}(x') \rangle$ разложимо в ряд по степеням l/L :

$$\langle \delta R_{\beta}^{\alpha}(x), h_{\delta}^{\gamma}(x') \rangle = \frac{1}{l^2} \left[{}^{(0)}S_{\beta|\delta}^{\alpha|\gamma} + {}^{(1)}S_{\beta|\delta}^{\alpha|\gamma} \frac{l}{L} + {}^{(2)}S_{\beta|\delta}^{\alpha|\gamma} \frac{l^2}{L^2} + \dots \right].$$

По предположению, компоненты $\kappa \hat{T}_{\beta}^{\alpha}$ имеют порядок, не больший $1/L^2$.

Поэтому $\kappa \langle \delta T_{\beta}^{\alpha}(x), h_{\delta}^{\gamma}(x') \rangle$ можно представить в виде $\frac{1}{L^2} M_{\beta|\delta}^{\alpha|\gamma}$, где

$M_{\beta|\delta}^{\alpha|\gamma}(x, x')$ — корреляционная функция относительных флуктуаций материи и поля. Приравнявая в уравнениях ${}^{(2)}$ члены при одинаковых степенях l/L , получаем

$${}^{(0)}S_{\beta|\delta}^{\alpha|\gamma} = 0; \quad {}^{(1)}S_{\beta|\delta}^{\alpha|\gamma} = 0; \quad {}^{(2)}S_{\beta|\delta}^{\alpha|\gamma} - 1/2 \delta_{\beta}^{\alpha} {}^{(2)}S_{\mu|\delta}^{\mu|\gamma} = {}^{(0)}M_{\beta|\delta}^{\alpha|\gamma} \text{ и т. д.}$$

Таким образом, флуктуации материи не участвуют в уравнениях нулевого и первого приближений. В этом заключается характерное свойство релятивистской теории, где гравитационное поле обладает собственными степенями свободы (впрочем, известно, что в анизотропных космологических моделях только достаточно длинные гравитационные волны развиваются независимо с неоднородностями вещества ${}^{(4)}$). Поправочные чле-

ны в уравнениях (1) также можно разложить по степеням l/L . Ограничиваясь нулевым приближением, получаем

$$\langle \delta^2 R_{\alpha} \rangle \approx + \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow x'} \partial_{\alpha'}^2 F((x-x')/l, x/L), \quad F \equiv {}^{(0)}G_{\alpha\beta}^{[1]v} - \frac{1}{2} G_{\alpha\beta}^{[1]v}. \quad (3)$$

F как функция «быстрых» аргументов определяется из уравнений ${}^{(0)}S_{\beta\delta}^{[1]v} = 0$: $g^{\mu\nu} \partial_{\mu\nu}^2 F = 0$ с точностью до членов порядка l/L . Пусть $\{\varphi(a^1, a^2, a^3, x)\}$ — 3-параметрический набор характеристик волнового уравнения ($g^{\alpha\beta} k_{\alpha} k_{\beta} = 0$, $k_{\alpha} \equiv \partial\varphi / \partial x^{\alpha}$) таких, что k_{α} изменяются как «сглаженные» функции. На масштабах l такие характеристики будут почти плоскими. Общее решение линейного уравнения $\bar{g}^{\mu\nu} \partial_{\mu\nu}^2 F\left(\frac{x-x'}{l}, \frac{x}{L}\right) = 0$ с указанной точностью представим в виде суперпозиции почти плоских волн

$$F((x-x')/l, x/L) = \int \exp[i(\varphi(a, x) - \varphi(a, x'))] \chi(a, \frac{x}{L}) da^1 da^2 da^3.$$

Воспользовавшись условием ограниченности ${}^{(1)}G_{\beta\delta}^{[1]v}$ (отсутствие секулярных членов), из уравнений ${}^{(1)}S_{\beta\delta}^{[1]v} = 0$ получаем

$$\nabla_{\alpha} [k^{\alpha} \chi(a, x/L)] = 0. \quad (4)$$

Введем теперь функцию $f(a, x/L)$:

$$\chi(a, \frac{x}{L}) \equiv -4\kappa \left| \frac{\partial^2 \varphi}{\partial a^i \partial x^i} \right| (V^{\bar{g}} g^{00})^{-1} f(a, \frac{x}{L})^*.$$

Из уравнения (4) следует $k^{\alpha} \nabla_{\alpha} f|_{a^i} = 0$, так как

$$k^{\alpha} \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} \ln \left| \frac{\partial^2 \varphi}{\partial a^i \partial x^i} \right| (V^{\bar{g}} g^{00})^{-1} = -\nabla_{\alpha} k^{\alpha}.$$

Перейдем от аргументов a^1, a^2, a^3 у функции f к переменным k_1, k_2, k_3 . Тогда для f получим уравнение

$$k^{\alpha} \partial f / \partial x^{\alpha} |_{k_i} + \Gamma_{\alpha i}^{\beta} k_{\beta} k^{\alpha} \partial f / \partial k_i = 0, \quad (5)$$

так как $k^{\alpha} \nabla_{\alpha} k_i = 0$, что следует из уравнения $\bar{g}^{\alpha\beta} k_{\alpha} k_{\beta} = 0$. Из (3) имеем

$$\langle \delta^2 R_{\alpha\beta} \rangle = -\kappa \int k_{\alpha} k_{\beta} f(k_i, x^{\alpha}) \frac{dk_1 dk_2 dk_3}{V^{\bar{g}} g^{00}}. \quad (6)$$

(здесь k_0 как функция x^{α} и k_i находится из условия $g^{00}(k_0)^2 + 2g^{0i}k_0 k_i + g^{ij}k_i k_j = 0$). Таким образом, функция f фактически играет роль функции распределения частиц с нулевой массой покоя ⁽²⁾, эти частицы естественно назвать гравитонами. Тензор энергии-импульса для гравитационной радиации естественно определить как $\kappa T_{\alpha\beta}^{(R)} = -\langle \delta^2 R_{\alpha\beta} \rangle$. След этого тензора равен нулю. Нетрудно показать, что из уравнения (5) следуют законы сохранения числа частиц $\nabla^{\alpha} n_{\alpha} = 0$ ($n_{\alpha} \equiv \int k_{\alpha} f \frac{dk_1 dk_2 dk_3}{V^{\bar{g}} g^{00}}$) и энергии-импульса $\nabla^{\alpha} T_{\alpha\beta} = 0$.

Итак, нами показано, что в основном, фон мелкомасштабных гравитационных полей, хаотически флуктуирующих около некоторого среднего, описывается равенствами (5) и (6).

Автор благодарит Л. И. Седова за ценные замечания и обсуждение результатов.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
12 III 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ В. Л. Гинзбург, Д. А. Киржиц, А. А. Любушин, ЖЭТФ, 60, 451 (1971).
² А. Д. Сахаров, ДАН, 177, 70 (1968). ³ Л. И. Седов, Методы подобия и размерностей в механике, «Наука», 1967. ⁴ Н. Р. Сибгатуллин, ДАН, 193, 1267 (1970). ⁵ Н. А. Черников, ДАН, 144, 314 (1962).

* Здесь $i, j = 1, 2, 3$.