

Н. М. ТИМОФЕЕВ

ОЦЕНКА ОСТАТОЧНОГО ЧЛЕНА В ОДНОМЕРНЫХ АСИМПТОТИЧЕСКИХ ЗАКОНАХ

(Представлено академиком Ю. В. Линником 9 III 1971)

Пусть $g(n)$ — вещественно-значная аддитивная функция,

$$B_N^2 = \sqrt{\sum_{p \leq N} g^2(p)/p} \text{ и } A_N = \sum_{p \leq N} g(p)/p.$$

Хорошо известно, что если

$$\frac{1}{B_N} \max_{p \leq N} |g(p)| = \mu_N \rightarrow 0 \text{ при } N \rightarrow \infty,$$

то

$$F_N(x) = \sum_{\substack{n \leq N \\ (g(n) - A_N)/B_N \leq x}} 1 \rightarrow G(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-u^2/2} du.$$

В работах ⁽¹⁻³⁾ для некоторых классов функций было доказано, что

$$F_N(x) = G(x) + O(\mu_N) \quad (1)$$

равномерно по x . Причем из результатов работы ⁽¹⁾ для $g(n) = v(n)$ и в ⁽³⁾ для более широкого класса функций видно, что оценка вида (1), вообще говоря, не улучшаемая.

Для произвольной сильно аддитивной функции сначала И. П. Кубилюс ⁽⁴⁾ доказал, что равномерно по x

$$F_N(x) = G(x) + O(\mu_N(e^{-x^2/2} \log^2 1 / \mu_N + 1)).$$

Затем М. Б. Барбану ⁽⁵⁾ и Р. В. Уждавинису ⁽⁶⁾ удалось заменить $\log^2 1 / \mu_N$ на $\log 1 / \mu_N$, и, наконец, в ⁽⁷⁾ М. Б. Барбан и А. И. Виноградов доказали, что

$$F_N(x) = G(x) + O\left(\mu_N \left(e^{-x^2/2} \log \frac{1}{\mu_N} \left(\log \log \frac{1}{\mu_N}\right)^{-1} + 1\right)\right).$$

В настоящей работе удается для довольно широкого класса, включающего сильно и вполне аддитивные функции, получить (1). Имеет место

Теорема. Пусть $g(n)$ — вещественная аддитивная функция такая, что $g(p^r) = O(p^{r\gamma})$ при $r \geq 2$, где $0 < \gamma < 1/4$ и

$$B_N^2(b) = \sum_{p \leq N} \frac{(g(p) - b \log p)^2}{p}, \quad A_N = \sum_{p \leq N} \frac{g(p)}{p}.$$

Если существует число b такое, что

$$\frac{1}{B_N(b)} \max_{p \leq N} |g(p) - b \log p| = \mu_N \rightarrow 0 \text{ при } N \rightarrow \infty,$$

то

$$F_N(x) = \frac{1}{N} \sum_{\substack{n \leq N \\ (g(n) - A_N)/B_N(b) \leq x}} 1 = G(x) + O(\mu_N)$$

равномерно по x .

Доказательство. По теореме Эссеена ⁽⁶⁾

$$F_N(x) - G(x) = O\left(\frac{1}{T} + \int_{-T}^T \frac{|\tau_N(\xi) - e^{-\xi^2/2}|}{\xi} d\xi\right),$$

где $\tau_N(\xi)$ и $e^{-\xi^2/2}$ — характеристические функции $F_N(x)$ и $G(x)$ соответственно. Доказательство будем проводить только в случае $b = 0$ и $g(n)$ — сильно аддитивная функция. Общий случай незначительно отличается от этого.

При малых ξ , пользуясь неравенством Турана — Кубилюса ⁽¹⁾, имеем

$$\begin{aligned} |\tau_N(\xi) - e^{-\xi^2/2}| &\leq \frac{1}{N} \sum_{n \leq N} |e^{i\xi(g(n) - A_N)/B_N} - 1| + O(\xi^2) \leq \\ &\leq \sqrt{\frac{\xi^2}{N} \sum_{n \leq N} \left| \frac{g(n) - A_N}{B_N} \right|^2} + O(\xi^2) = \\ &= O\left(|\xi| \sqrt{\frac{1}{B_N^2} \sum_{p \leq N} \frac{g^2(p^a)}{p^a}}\right) + O(\xi^2) = O(|\xi| + \xi^2). \end{aligned} \quad (2)$$

При $\mu_N \leq |\xi| \leq T = 1/(16\mu_N)$ применим аналитический метод. Пусть $g_N(n)$ — аддитивная функция такая, что

$$g_N(p^r) = \begin{cases} g(p^r)/B_N, & \text{если } p \leq N, \\ 0, & \text{если } p > N \text{ и } F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{i\xi g_N(n)}}{n^s}. \end{cases}$$

Заметим сначала, что

$$F(s) = \zeta(s) \exp \left[\sum_{p^k} \frac{(e^{i\xi g(p)/B_N} - 1)^k}{k p^{sk}} \right] = \zeta(s) \exp L(s).$$

Пусть $M_N = \{s: \operatorname{Re} s = \sigma_N = 1 + 1/\log N, -\log^2 N \leq t \leq \log^2 N\}$. Применяя формулу обращения, которая в этом случае получается так же, как и в обычных, интегрируя по частям, получаем

$$\begin{aligned} \tau_N(\xi) &= e^{-i\xi A_N/A_N} \frac{1}{2\pi i} \int_{M_N} \frac{N^{s-1}}{s} F(s) ds + O\left(\frac{1}{\log N}\right) = \\ &= e^{-i\xi A_N/B_N} \frac{1}{2\pi i} \int_{M_N} \frac{N^{s-1}}{s} \zeta'(s) \exp L(s) ds + \\ &+ O\left(\frac{1}{\log N} \int_{M_N} \frac{|L'(s)|}{|s|} |\zeta(s)| |\exp L(s)| |ds|\right) + O\left(\frac{1}{\log N}\right). \end{aligned} \quad (3)$$

Для оценки каждого из полученных слагаемых воспользуемся неравенством Шварца и соотношениями

$$I_1 = \int_{M_N} \frac{1}{|s|} \left| \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right|^2 |ds| = O(\log N); \quad (4)$$

$$I_2 = \int_{\substack{M_N \\ |t| \geq 1/\mu_N^4 \log N}} \frac{1}{|s|} \left| \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right|^2 |ds| = O(\mu_N^4 \log N); \quad (5)$$

$$I_3 = \int_{\substack{M_N \\ |t| \geq 2}} \frac{1}{|s|} |\zeta(s)|^2 |\exp 2L(s)| |ds| = O(\log^{1/4} N); \quad (6)$$

$$I_4 = \int_{\substack{M_N \\ |t| < 2}} \frac{1}{|s|} |\zeta(s)|^2 |\exp 2L(s)| |ds| = O(e^{-\xi^{2/6}} \log N); \quad (7)$$

и для любого $\alpha > 0$

$$I_5(\alpha) = \int_{M_N} \frac{1}{|s|^{1+\alpha}} |L'(s)|^2 |ds| = O(\xi^2 \mu_N^2 \log N). \quad (8)$$

Оценки (4)–(6) следуют из известных свойств $\zeta(s)$, $\zeta'(s)$ и неравенства $\operatorname{Re} L(s) \leq |\xi \mu_N| \log \log N \leq \frac{1}{16} \log \log N$. При доказательстве (7) основную роль играет неравенство

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} L(s) \leq & -\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{16}\right) \xi^2 + \frac{|\xi|}{2} \sqrt{\log \left(1 + \left(\frac{t}{\sigma_N - 1}\right)^2\right)} + \\ & + \frac{1}{2(16)^2} \log \left(1 + \left(\frac{t}{\sigma_N - 1}\right)^2\right) + O(|\xi|) + O(1). \end{aligned}$$

При доказательстве (8) используется следующая идея Халоса⁽⁵⁾.

Пусть $H(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n/n^s$ и $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|/n^\sigma$ сходится при $\sigma > 1$. Тогда $\frac{1}{s} H(s)$

можно представить в виде преобразования Фурье от $\sum_{n \leq e^u} a_n$, а затем исполь-

зовать равенство Парсеваля. Применяя эти соображения, можно найти оценку для $I_5(1)$. Отсюда довольно легко получается оценка для $I_5(\alpha)$ при $\alpha > 0$.

Применяя оценки (4), (6)–(8) и неравенство $\mu_N \geq 1/\sqrt{\log \log N}$, пользуясь неравенством Шварца для оценки каждого слагаемого в (3), получим

$$\tau_N(\xi) = O(e^{-\xi^{2/12}}). \quad (9)$$

При $\mu_N \leq |\xi| \leq \sqrt{12 \log(1/\mu_N)}$, пользуясь (4)–(8) и обозначив $\Gamma_0 = \{s: \operatorname{Re} s = 1 + 1/\log N, -1/(\mu_N^4 \log N) \leq \operatorname{Im} s \leq 1/(\mu_N^4 \log N)\}$, равенство (3) приведем к виду

$$\tau_N(\xi) = e^{-\xi A_N/B_N} \frac{1}{2\pi i \log N} \int_{\Gamma_0} \frac{N^{s-1}}{s} \zeta'(s) \exp L(s) ds + O(|\xi| \mu_N e^{-\xi^{2/12}}).$$

Подынтегральная функция при $\operatorname{Re} s > 1/2$ аналитическая и имеет полюс в этой области только в точке $s=1$. Поэтому интеграл по контуру Γ_0

$$\Gamma_1 = \left\{ s: 1 + \frac{1}{\log N} \geq \operatorname{Re} s \geq 1 - \frac{\log 1/\mu_N}{\log N}; \quad \operatorname{Im} s = \frac{1}{\mu_N^4 \log N} \right\},$$

$$\Gamma_2 = \left\{ s: \operatorname{Re} s = 1 - \frac{\log 1/\mu_N}{\log N}, \quad \frac{1}{\mu_N^4 \log N} \geq \operatorname{Im} s \geq -\frac{1}{\mu_N^4 \log N} \right\},$$

$$\Gamma_3 = \left\{ s: 1 - \frac{\log 1/\mu_N}{\log N} \leq \operatorname{Re} s \leq 1 + \frac{1}{\log N}; \quad \operatorname{Im} s = -\frac{1}{\mu_N^4 \log N} \right\}$$

равен вычету подынтегральной функции в точке $s=1$. Пользуясь тем, что $|\zeta'(s)| = O\left(\frac{1}{|s-1|^2}\right)$ на $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$, и на этом контуре

$$|\exp L(s)| \leq \exp \left[- \sum_{p \leq N} \frac{1 - \cos \xi g_N(p)}{p^\sigma} + \right. \\ \left. + \sqrt{4 \sum_{p \leq N}^{\frac{1}{4}} \frac{1 - \cos \xi g_N(p)}{p^\sigma} \cdot \sum_{p \leq N}^{\frac{1}{4}} \frac{1 - \cos t \log p}{p^\sigma}} + \right. \\ \left. + 4 |\xi \mu_N| \sum_{\substack{N^{\frac{1}{4}} \leq p \leq N}} \frac{1}{p^\sigma} \right] = O(1),$$

получаем при $\mu_N \leq |\xi| \leq \sqrt{12 \log 1/\mu_N}$

$$\tau_N(\xi) = e^{-i\xi A_N/B_N} \frac{1}{\log N} \operatorname{Re} s \left[\frac{N^{s-1}}{s} \exp L(s) \cdot \xi'(s) \right] + O\left(\frac{\mu_N}{\log 1/\mu_N}\right) + \\ + O(|\xi| \mu_N e^{-\xi^{2/12}}) = e^{-\xi^{2/2}} + O\left(\frac{\mu_N}{\log 1/\mu_N} + |\xi| \mu_N e^{-\xi^{2/12}}\right).$$

Из последнего соотношения, оценок (9), (2) и неравенства Эссеена следует утверждение теоремы.

В заключение автор выражает глубокую благодарность Б. В. Левину за помощь, оказанную при выполнении этой работы.

Владимирский государственный педагогический институт
им. П. И. Лебедева-Полянского

Поступило
19 II 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ И. П. Кубилюс, Вероятностные методы в теории чисел, Вильнюс, 1962.
² A. Renyi, P. Turan, Acta Arithm., 1, 71 (1958). ³ Б. В. Левин, А. С. Файн-
штейн, УМН, 22, 3, 135 (1967). ⁴ М. Б. Барбан, Изв. АН УзССР, № 5, 3 (1961).
⁵ G. Halász, Acta Math. Acad. Sci. Hung., 19 (3—4), 365 (1968). ⁶ C. G. Esseen,
Acta Math., 77, 1 (1945). ⁷ М. Б. Барбан, А. Н. Виноградов, ДАН, 154, № 3,
455 (1964). ⁸ Р. В. Уждавинис, Кандидатская диссертация, Вильнюс, 1961.