

УДК 513.831

МАТЕМАТИКА

В. К. БЕЛЬНОВ

О МЕТРИЗУЕМЫХ ТОПОЛОГИЯХ

(Представлено академиком П. С. Александровым 12 IV 1971)

В данной работе пара (X, μ) обозначает топологическое пространство с множеством точек X и топологией μ . Если A — подмножество множества X , то пара $(A, \mu|_A)$ обозначает топологическое пространство A с топологией, индуцированной топологией μ .

Теорема 1. Пусть (X, μ) — метрическое пространство, $A \subseteq X$ — замкнутое подмножество (X, μ) , и пусть $f: (A, \mu|_A) \rightarrow (A, \nu)$ — уплотнение на сепарабельное метрическое пространство (A, ν) .

Тогда на множестве X существует такая метризуемая топология $\bar{\nu}$, что: 1) $\bar{\nu} \leq \mu$; 2) $\bar{\nu}|_{X \setminus A} = \mu|_{X \setminus A}$; 3) $\bar{\nu}|_A = \nu$; 4) A является замкнутым подмножеством пространства $(X, \bar{\nu})$.

Определение 1. Пусть (X, μ) — метрическое пространство и $\dim(X, \mu) = n < \infty$. Назовем топологию μ n -неуплотняемой, если для любой метризуемой топологии ν на множестве X , для которой $\mu \geq \nu$, всегда $\dim(X, \nu) = \dim(X, \mu)$.

Из теоремы 1 легко вытекает

Теорема 2. Пусть (X, μ) — метрическое пространство, и пусть выполняется одно из следующих условий:

- 1) (X, μ) содержит замкнутое дискретное подмножество мощности $\mathfrak{c}$;
- 2) (X, μ) содержит множество $\mathcal{N}$ иррациональных чисел в качестве замкнутого подмножества.

Тогда существует такая метризуемая топология ν на множестве X , что $\nu < \mu$ и пространство (X, ν) содержит гильбертов кирпич I^ω в качестве замкнутого подмножества.

Из теоремы 2 следует, что если принять континуум-гипотезу, то любое n -неуплотняемое метрическое пространство окажется сепарабельным. Действительно, если $\aleph_1 = \mathfrak{c}$, то любое несепарабельное метрическое пространство содержит замкнутое дискретное подмножество мощности $\mathfrak{c}$ и поэтому по теореме 2 не может быть n -неуплотняемым.

Приведем примеры n -неуплотняемых метрических пространств.

1. Любое метрическое сепарабельное пространство (X, μ) с $|X| < \mathfrak{c}$ является 0-неуплотняемым.

2. Любое метрическое пространство (X, μ) с $\dim(X, \mu) = n < \infty$, являющееся абсолютным F_σ , n -неуплотняемо.

3. Любое метрическое сепарабельное ν -пространство Лузина ⁽¹⁾ является 0-неуплотняемым.

Следующее определение хорошо известно ⁽¹⁾.

Определение 2. Непрерывное отображение $f: X \rightarrow Y$ называется замкнутым в точке $y_0 \in Y$, если для каждого множества F , замкнутого в пространстве X , из соотношения $y_0 \in [f(F)]_\tau$ следует, что $y_0 \in f(F)$.

Пусть μ и ν — топологии на множестве X , причем $\mu > \nu$, и пусть $f: (X, \mu) \rightarrow (X, \nu)$ — естественное уплотнение. Обозначим множество всех точек $x \in X$, в которых отображение f незамкнуто, через $S(\mu, \nu)$.

Теорема 3. Пусть μ_0 и μ_1 — метризуемые топологии на множестве X , причем $\mu_0 < \mu_1$.

Тогда для каждой точки $x \in S(\mu_1, \mu_0)$ существует континуум линейно упорядоченных множеств $M_s = \{\mu_s^\alpha(x), \alpha \in R(\omega_1)\}$, $s \in S$, $|S| = \mathfrak{c}$ метри-

зуемых топологий на множестве X ($R(\omega_1)$ — трансфинитная прямая), та-
ких, что

1) $\mu_s^{\alpha_1}(x) < \mu_s^{\alpha_2}(x)$, если $0 \leq \alpha_1 < \alpha_2 < \omega_1$, где $\mu_s^0(x) = \mu_0$ для всех
точек $x \in S(\mu_1, \mu_0)$ и всех $s \in S$ (x и s фиксированы);

2) $\mu_s^\alpha(x) < \mu_1$ для всех $x \in S(\mu_1, \mu_0)$ и всех $s \in S$;

3) $\mu_s^\alpha(x) = \bigcup_{0 \leq \beta < \alpha} \mu_s^\beta(x)$ при $0 < \alpha < \omega_1$ (x и s фиксированы);

4) $\mu_{s_1}^{\alpha_1}(x)|_{x \setminus x} = \mu_{s_2}^{\alpha_2}(x)|_{x \setminus x} = \mu_1|_{x \setminus x}$ для любых $\alpha_1, \alpha_2 \in R(\omega_1)$,
 $s_1, s_2 \in S$;

5) каковы бы ни были α_1 и $\alpha_2 \in R(\omega_1)$, топологии $\mu_{s_1}^{\alpha_1}(x)$ и $\mu_{s_2}^{\alpha_2}(y)$
несравнимы, если $s_1 \neq s_2$ или $x \neq y$.

Теорема 4. Пусть X — некомпактное метрическое сепарабельное
пространство, и пусть aX — любое компактное расширение пространст-
ва X .

Тогда для каждой точки $x \in aX \setminus X$ существуют такие компактные
расширения a_α^*X , $\alpha \in R(\omega_1)$, пространства X , что

1) $a_{\alpha_1}^*X < a_{\alpha_2}^*X$ при $0 \leq \alpha_1 < \alpha_2 < \omega_1$, где $a_0^*X = aX$ для любой точ-
ки $x \in aX - X$ (x фиксировано);

2) $a_\alpha^*X = \sup_{0 \leq \beta < \alpha} a_\beta^*X$ при $0 < \alpha < \omega_1$ (x фиксировано);

3) $a_\alpha^*X = \inf_{\beta > \alpha} a_\beta^*X$ при $0 \leq \alpha < \omega_1$ (x фиксировано);

4) $\dim a_\alpha^*X = \dim aX$, если $\dim aX > 0$ и $\dim a_\alpha^*X = 1$, если
 $\dim aX = 0$ для любого $x \in aX - X$ и любого $\alpha > 0$;

5) каковы бы ни были $\alpha_1, \alpha_2 \in R(\omega_1)$, $\alpha_1, \alpha_2 > 0$, расширения $a_{\alpha_1}^*X$
и $a_{\alpha_2}^*X$ несравнимы, если $x \neq y$.

Доказательство. Пусть точка $x \in aX \setminus X$. Так как пространст-
во $aX - x$ локально компактно и не компактно, существует такое компакт-
ное расширение Y пространства $aX \setminus x$, что его нарост $Y \setminus (aX \setminus x)$ со-
падает с отрезком $[0, 1]$ ⁽²⁾. Ясно, что $\dim Y = \dim aX$, если $\dim aX > 0$
и $\dim Y = 1$, если $\dim aX = 0$. Так как пространство $aX \setminus x$ локально
компактно, существует допустимое отображение $f: Y \rightarrow aX$ (т. е. точки
пространства $aX \setminus x$ при отображении f остаются неподвижными). Ясно,
что Y является компактным расширением пространства X . Положим
 $Y = a_1^*X$ и $f = f_0^1: a_1X \rightarrow aX$. По построению, $(f_0^1)^{-1}(x) = [0, 1]$. Далее,
для любого $\alpha \in (0, 1)$ рассмотрим непрерывное разбиение компакта a_1^*X ,
элементами которого являются точки множества $a_1^*X \setminus [\alpha, 1]$ и множе-
ство $[\alpha, 1]$. Пусть компакт Y_α является пространством этого разбиения и
 $f_\alpha: a_1^*X \rightarrow Y_\alpha$ — естественная проекция. Нетрудно показать, что Y_α яв-
ляется компактным расширением пространства X . Положим $Y_\alpha = a_\alpha^*X$
и $f_\alpha = f_\alpha^1: a_1^*X \rightarrow a_\alpha^*X$. Можно проверить, что $a_{\alpha_1}^*X > a_{\alpha_2}^*X$ при $0 \leq \alpha_2 <$
 $< \alpha_1 \leq 1$ и что выполняются условия 2) и 3). Покажем, что выполняется
условие 4). Пусть $\alpha \in (0, 1)$ и пусть $f_0^\alpha: a_\alpha^*X \rightarrow aX$ — допустимое отобра-
жение. Тогда

$$a_\alpha^*X = (f_0^\alpha)^{-1}(aX \setminus x) \cup f_\alpha^1[0, \alpha] \cup f_\alpha^1(\alpha) = (aX \setminus x) \cup [0, \alpha) \cup f_\alpha^1(\alpha).$$

Из этого представления уже непосредственно следует, что $\dim a_\alpha^*X =$
 $= \dim aX$, если $\dim aX > 0$ и $\dim a_\alpha^*X = 1$, если $\dim aX = 0$.

Продолжаем построение, используя трансфинитную индукцию. Пусть
уже для всех $\lambda < \tau < \omega_1$ мы построили отрезок трансфинитной прямой
 $R(\lambda) \cup \lambda$ так, что выполняются условия 1) — 4). Тогда, если τ — трансфи-
нитное число первого рода, т. е. $\tau = \lambda + 1$, то применяя изложенную выше
конструкцию к расширению a_λ^*X вместо aX , мы построим компактные
расширения a_α^*X , где $\lambda \leq \alpha \leq \lambda + 1$. Ясно, что условия 1) — 4) будут
выполняться и для отрезка трансфинитной прямой $R(\tau) \cup \tau$. Пусть τ —
предельное трансфинитное число. Положим $a_\tau^*X = \sup_{\lambda < \tau} a_\lambda^*X$. Условия

1) — 3) для отрезка трансфинитной прямой $R(\tau) \cup \tau$ будут выполняться

автоматически, условие 4) также будет выполнено, так как в категории бикомпактов размерность сохраняется при переходе к обратным пределам. Условие 5) для различных точек $x \neq y \in aX \setminus X$ вытекает из конструкции доказательства.

Теорема доказана.

Механико-математический факультет
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова

Поступило
7 IV 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ К. Куратовский, Топология, 1, М., 1966. ² J. M. Aarts, P. V. van Emde Boas, Nieuw. arch. Wiskunde, Ser. 3, 15, № 1, 34 (1967).