Доклады Академии наук СССР
1972. Том 202, № 3

УДК 517.946 МАТЕМАТИКА

В. Н. ГОЛЬДБЕРГ

ВЕТВЛЕНИЕ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ СМЕШАННЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ПОЧТИ ЛИНЕЙНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ НА ПЛОСКОСТИ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 23 VI 1971)

1°. В прямоугольнике $\overline{\Pi}_{\overset{\circ}{T}} = \{0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant t \leqslant \overset{\circ}{T} < \infty\}$ рассмотрим смешанную задачу

$$p_t + \lambda p_x = P(x, t, p, q), \tag{1}$$

$$q_t - \nu q_x = Q(x, t, p, q), \tag{2}$$

$$p(x, 0) = p_0(x), \quad q(x, 0) = q_0(x), \tag{3}$$

$$A(t, p(0, t), \quad q(0, t)) = 0, \tag{4}$$

$$q(1, t) = 0 \tag{5}$$

где $\lambda = \operatorname{diag}[\underbrace{\lambda_1, \ldots, \lambda_1}_{k_1}; \underbrace{\lambda_2, \ldots; \lambda_2}_{k_2}; \ldots; \underbrace{\lambda_r, \ldots, \lambda_r}_{k_r}]$, $\nu = \operatorname{diag}[\nu_1, \nu_2, \ldots$ $\ldots, \nu_m]$, постоянные $\lambda_1 > \lambda_2 > \ldots > \lambda_r > 0$, $\nu_1 \geqslant \nu_2 \geqslant \ldots \geqslant \nu_m > 0$, q, q_0, Q — $(m \times 1)$-матрицы, p, p_0, P, A — $(n \times 1)$-матрицы $\left(n = \sum\limits_{s=1}^{r} k_s\right)$. Предположим для простоты, что $0 < \overset{\circ}{T} < (\lambda_1 + \nu_1)^{-1}$ *.

В случае граничных условий (4), заданных в виде, разрешенном относительно $p(0, t)$, теоремы единственности и продолжаемости (по t) решения задачи (1) — (5) содержатся в ([1-4]). Существование и единственность в малом решении задачи (1) — (5) при условии $|A_p(0, p_0, (0), q_0(0)| \neq 0$ установлены в ([2]). Имеет место следующая теорема 1 об однозначной продолжаемости решения задачи (1) — (5) **.

Теорема 1. *Пусть P, Q, A, p_0, $q_0 \in C_1(\overline{\Pi}_{\overset{\circ}{T}} \times R^{n+m})$ удовлетворяют условиям согласования, необходимым для существования в $\overline{\Pi}_{\overset{\circ}{T}}$ решения задачи (1) — (5) класса C_1, и $|A_p(0, p_0(0), q_0(0))| > 0$.*

Тогда либо

A) *в $\overline{\Pi}_{\overset{\circ}{T}}$ существует единственное решение $(\overset{\circ}{p}, \overset{\circ}{q}) = (\overset{\circ}{p}{}^1, \overset{\circ}{p}{}^2, \ldots, \overset{\circ}{p}{}^n, \overset{\circ}{q}{}^1, \ldots, \overset{\circ}{q}{}^m) \in C_1(\overline{\Pi}_{\overset{\circ}{T}})$ задачи (1) — (5), и $|A_p(t, \overset{\circ}{p}(0, t), \overset{\circ}{q}(0, t))| > 0$ при $0 \leqslant t \leqslant \overset{\circ}{T}$; либо*

B) *найдется такое $0 < T^* \leqslant \overset{\circ}{T}$, что в $\Pi_{T^*} = \{0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant t < T^*\}$ существует единственное решение $(\overset{\circ}{p}, \overset{\circ}{q}) \in C_1(\Pi_{T^*})$ задачи (1) — (5), $|A_p(t, \overset{\circ}{p}(0, t), \overset{\circ}{q}(0, t))| > 0$ при $0 \leqslant t < T^*$, и выполняется по крайней мере одно из следующих равенств:*

$$s \equiv \sum_{i=1}^{n} \sup_{\Pi T^*} |\overset{\circ}{p}{}^i| + \sum_{j=1}^{m} \sup_{\Pi_{T^*}} |\overset{\circ}{q}{}^j| = \infty, \quad m \equiv \inf_{0 \leqslant t < T^*} |A_p(t, \overset{\circ}{p}(0, t), \overset{\circ}{q}(0, t))| = 0.$$

* Неравенство $0 < \overset{\circ}{T} < (\lambda_1 + \nu_1)^{-1}$ исключает взаимное влияние граничных условий (4) и (5) на свойства решения задачи (1) — (5) в $\overline{\Pi}_{\overset{\circ}{T}}$. Поэтому все результаты данной заметки имеют место при более общих граничных условиях, чем (5).

** Для случая $r = 1$, $k_1 = 1$ теорема 1 анонсирована в ([5]).

Утверждение А) и равенство $s = \infty$ в утверждении В) теоремы 1 означают, что решение задачи (1) — (5) продолжено до границы области определения вектор-функций P, Q, A. Теорема 1 оставляет открытым вопрос о продолжаемости решения, если имеет место утверждение В), но $T^* < \mathring{T}$, $s < \infty$ и, следовательно, $m = 0$. В этом случае при $r = 1$, $k_1 = 1$ установлено ([5]), что если

$$J \equiv \int_0^{T^*} \frac{d\tau}{|A_p(\tau, \overset{\circ}{p}(0, \tau), \overset{\circ}{q}(0, \tau))|} < \infty,$$

то задача (1) — (5) в $\overline{\Pi}_T$ при $T > T^*$, вообще говоря, не имеет даже непрерывных обобщенных решений; в то же время решение $(\overset{\circ}{p}, \overset{\circ}{q})$ однозначно продолжаемо при $t \geqslant T^*$ в классе разрывных решений, которые устойчивы при малых возмущениях начальных условий и при возмущении функции A членом $\mu L(D^1p, D^1q)$, где $L(D^1p, D^1q)$ — линейная форма относительно p_x, p_t, q_x, q_t, а μ — малый параметр.

Результаты заметки ([5]) допускают обобщение * на задачу (1) — (5) если существует такое $1 \leqslant l \leqslant n$, что все функции A^i, $1 \leqslant i \leqslant n$, $i \neq l$, представимы в виде

$$A^i(t, p, q) = p^i - g^i(t, p^l, q). \tag{6}$$

В настоящей работе исследуется продолжаемость решения задачи (1) — (5) при $t \geqslant T^*$ в том случае, когда имеет место утверждение В) теоремы 1, $T^* < \mathring{T}$, $s < \infty$, $J = \infty$, и при некотором $1 \leqslant l \leqslant n$ выполняется условие (6). Оказывается, что решение $(\overset{\circ}{p}, \overset{\circ}{q})$, вообще говоря, продолжаемо неоднозначно при $t \geqslant T^*$ в классе гладких решений и структура множества решений задачи (1) — (5) в $\overline{\Pi}_T$, $T > T^*$, определяется типом возникающей при $t = T^*$ особой точки обыкновенного дифференциального уравнения, которому удовлетворяет функция $\overset{\circ}{p}{}^l(0, t)$ при $0 \leqslant t < T^*$. Ниже предполагается, что p_0, q_0, P, Q, g^i, $A^l \in C_2(\overline{\Pi}_{\mathring{T}} \times R^{n+m})$.

2°. Исследование гладкости вектор-функции $(\overset{\circ}{p}, \overset{\circ}{q})$ в $\overline{\Pi}_{T^*}$. Для произвольных $p \in R^n$, $q \in R^m$ положим

$$H(t, p^l, q) = A^l(t, p, q)\,|_{p^i = g^i(t, p^l, q),\ i \neq l}.$$

Так как $H_{p^l}(t, p^l, q) = |A_p(t, p, q)|$ и $m = 0$, то $\inf\limits_{0 \leqslant t < T^*} H_{p^l}(t, \overset{\circ}{p}{}^l(0, t), \overset{\circ}{q}(0, t)) = 0$. В силу тождества $H(t, \overset{\circ}{p}{}^l(0, t), \overset{\circ}{q}(0, t)) \equiv 0$ функция $p^l = \overset{\circ}{p}{}^l(0, t)$ удовлетворяет при $0 \leqslant t < T^*$ уравнению

$$dp^l / dt = -[H_{p^l}(t, p^l, \overset{\circ}{q}(0, t))]^{-1}[H_t(t, p^l, \overset{\circ}{q}(0, t)) + H_q(t, p^l, \overset{\circ}{q}(0, t))\overset{\circ}{q}_t(0, t)]. \tag{7}$$

Ниже всюду предполагается, что при некотором $0 < \varepsilon < T^*$

$$\inf_{T^* - \varepsilon \leqslant t < T^*} \left| \frac{\partial^2 H(t, \overset{\circ}{p}{}^l(0, t), \overset{\circ}{q}(0, t))}{(\partial p^l)^2} \right| > 0.$$

Лемма 1. *Вектор-функция* $\overset{\circ}{p} \in C(\overline{\Pi}_{T^*})$, $\overset{\circ}{q} \in C_1(\overline{\Pi}_{T^*})$ *и*

$$H_{p^l}(T^*, \overset{*}{p}{}^l, q^*) = 0, \quad H_t(T^*, \overset{*}{p}{}^l, \overset{*}{q}) + H_q(T^*, \overset{*}{p}{}^l, q^*)\overset{\circ}{q}_t(0, T^*) = 0,$$

где $\overset{*}{p}{}^l = \overset{\circ}{p}{}^l(0, T^*)$, $q^* = \overset{\circ}{q}(0, T^*)$.

Непрерывность вектор-функций $\overset{\circ}{p}_x$, $\overset{\circ}{p}_t$ в $\overline{\Pi}_{T^*}$ определяется, очевидно, существованием конечной производной $\partial \overset{\circ}{p}{}^l(0, T^* - 0) / \partial t$. Изучение непрерывной дифференцируемости при $t = T^*$ решения $p^l = \overset{\circ}{p}{}^l(0, t)$ уравнения (7), входящего в особую точку $(T^*, \overset{*}{p}{}^l)$, опирается на лемму 2.

---

* Полученные в этом направлении результаты предполагается опубликовать отдельно.

Лемма 2. *Функция* $p^l = \overset{\circ}{p}{}^l(0, t)$ *удовлетворяет при* $0 \leqslant t < T^*$ *уравнению*

$$\frac{dp^l}{dt} = \frac{a(t-T^*) + b(p^l - \overset{*}{p}{}^l) + f_1(t, p^l)}{c(t-T^*) + d(p^l - \overset{*}{p}{}^l) + f_2(t, p^l)}, \tag{8}$$

где функции $f_s \in C_1([0, T^*] \times R^1)$, $\partial f_s(T^*, \overset{*}{p}{}^l) / \partial p^l = \partial f_s(T^*, \overset{*}{p}{}^l) / \partial t = 0$, *постоянные* a, b, c *однозначно определяются вектор-функцией* $(\overset{\circ}{p}, \overset{\circ}{q})$ *и* $d = \partial^2 H(T^*, \overset{*}{p}{}^l, \overset{*}{q}) / (\partial p^l)^2$.

Предположим, что $\Delta \equiv bc - ad \neq 0$. В силу теоремы Бендиксона ([6]) $\overset{\circ}{p}{}^l(0, t) \in C_1(0, T^*]$, и величина $\partial \overset{\circ}{p}{}^l(0, T^* - 0) / dt$ совпадает с одним из корней

$$\sigma_s = [(b-c) + (-1)^{s+1}\sqrt{(b+c)^2 - 4\Delta}]\,(2d)^{-1}, \quad s = 1, 2,$$

уравнения $d\sigma^2 + (C - b)\sigma - a = 0$. Поэтому $E \equiv (b+c)^2 - 4\Delta \geqslant 0$, и, следовательно, особая точка $(T^*, \overset{*}{p}{}^l)$ уравнения (8) есть либо седло $(\Delta < 0)$, либо узел $(\Delta > 0)$ ([7]).

Теорема 2. *Вектор-функция* $\overset{\circ}{p} \in C_1(\overline{\Pi}_{T^*})$.

3°. Гладкие решения задачи (1) — (5) в $\overline{\Pi}_T$ при $T > T^*$.

Для $T^* < T \leqslant \overset{\circ}{T}$, $1 \leqslant i \leqslant r$, обозначим

$$G_T[i] = \{(x, t) \colon T^* \leqslant t \leqslant T,\ 0 \leqslant x \leqslant \lambda_i(t - T^*)\},$$
$$D_T[i] = \overline{\overline{\Pi}_T \setminus G_T[i]}.$$

По произвольному вектору $p = (p^1, p^2, \ldots, p^n) \in R^n$ определим векторы $p_i = (p_{i1}, p_{i2}, \ldots, p_{ik_i}) \in R^{k_i}$, $1 \leqslant i \leqslant r$, с компонентами $p_{i\varkappa} = p^{\theta_{i-1}+\varkappa}$, где $1 \leqslant \varkappa \leqslant k_i$, $\theta_0 = 0$, $\theta_i = \sum\limits_{\rho=1}^{i} k_\rho$. Аналогично на множестве $\overline{\Pi}_{\overset{\circ}{T}} \times R^{n+m}$ определяются вектор-функции $p_i(x, t, p, q)$. Запишем систему (1) в виде

$$\partial p_i / \partial t + \lambda_i \partial p_i / \partial x = p_i(x, t, p, q). \tag{9}$$

Обозначим через $\mathfrak{R}_T$, $T^* < T \leqslant \overset{\circ}{T}$, множество определенных в $\overline{\Pi}_T$ вектор-функций (p, q), $p \in R^n$, $q \in R^m$, таких, что

1) $p \in C(\overline{\Pi}_T)$, $p_i \in C_1(G_T[i])$, $p_i \in C_1(D_T[i])$, $1 \leqslant i \leqslant r$, $q \in C_1(\overline{\Pi}_T)$;

2) $p = \overset{\circ}{p}$, $q = \overset{\circ}{q}$ для $(x, t) \in \overline{\Pi}_{T^*}$.

Определение. Вектор-функция $(p, q) \in \mathfrak{R}_T$, $T^* < T \leqslant \overset{\circ}{T}$, называется решением задачи (1)—(5) в $\overline{\Pi}_T$, если она удовлетворяет в $\overline{\Pi}_T$ уравнениям (2), (9) ($\partial p_i / \partial t$, $\partial p_i / \partial x$ на характеристике $x = \lambda_i(t - T^*)$ понимаются как соответствующие односторонние производные) и уравнениям (4), (5) при $T^* \leqslant t \leqslant T$.

Теорема 3. *Пусть вектор-функция* (p, q) *есть решение задачи* (1)—(5) *в* $\overline{\Pi}_T$, $T^* < T \leqslant \overset{\circ}{T}$.

Тогда либо $\partial p^l(0, T^* + 0)/\partial t = \sigma_1$, *либо* $\partial p^l(0, T^* + 0) / \partial t = \sigma_2$; *если* $\partial p^l(0, T^* + 0) / \partial t = \partial p^l(0, T^* - 0) / \partial t$, *то* $p \in C_1(\overline{\Pi}_T)$.

Теорема 4. *Пусть* $\Delta < 0$.

Тогда найдется такое $T^* < \tau \leqslant \overset{\circ}{T}$, *что в* $\overline{\Pi}_\tau$ *существуют два и только два решения* $(\overset{s}{p}, \overset{s}{q})$, $s = 1, 2$, *задачи* (1)—(5) *и* $\partial \overset{s}{p}{}^l(0, T^* + 0) / \partial t = \sigma_s$.

Теорема 5. *Пусть* $\Delta > 0$, $E > 0$* *и* $b + c > 0$ (< 0).

Тогда найдется такое $T^* < \tau_1 \leqslant \overset{\circ}{T}$, *что*

1) *в* $\overline{\Pi}_{\tau_1}$ *существует единственное решение* (p, q) *задачи* (1)—(5), *удовлетворяющее условию* $\partial p^l(0, T^* + 0) / \partial t = \sigma_1$ $(= \sigma_2)$;

* Отметим, что $(b + c)^2 = E + 4\Delta > 0$ в этом случае.

2) *в* $\overline{\Pi}_{\tau_1}$ *существует мощности континуума множество решений* $\{(\overset{\alpha}{p}, \overset{\circ}{q})\}$, $\alpha \in [0, 1]$, *задачи* (1)—(5), *удовлетворяющих условию* $\partial p^1(0, T^* + 0)/\partial t = \sigma_2$ $(= \sigma_1)$.

Научно-исследовательский радиофизический институт
Министерства высшего и среднего специального
образования РСФСР
Горький

Поступило
17 VI 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Р. Курант, Уравнения с частными производными, М., 1964. [2] Б. Л. Рождественский, Н. Н. Яненко, Системы квазилинейных уравнений, «Наука», 1968. [3] В. Э. Аболиня, А. Д. Мышкис, Матем. сборн., **50** (92), 4, 423 (1960). [4] А. Д. Мышкис, Материалы к совместному советско-американскому симпозиуму по уравнениям с частными производными, Новосибирск, 1963. [5] В. Н. Гольдберг, ДАН, **195**, № 3, 532 (1970). [6] Ф. Трикоми, Дифференциальные уравнения, ИЛ, 1962. [7] А. А. Андронов, Е. А. Леонтович и др., Качественная теория динамических систем, «Наука», 1966.