

УДК 517.92

МАТЕМАТИКА

В. Н. ЛАГУНОВ

НЕЛИНЕЙНАЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ИГРА УБЕГАНИЯ

(Представлено академиком Л. С. Понтрягиным 17 VI 1971)

Результаты данной заметки примыкают к результатам работ ⁽¹⁻³⁾ и получены с помощью некоторой экстраполяционной конструкции. Ранее аналогичные конструкции применялись нами в ^(4, 5).

А. Дифференциальная игра задается следующим образом. Изменение фазового вектора игры z описывается векторным дифференциальным уравнением

$$\dot{z} = F(z, u, v), \quad (1)$$

где $z \in R$, $u \in P \subset R_u$; $v \in Q \subset R_v$; R, R_u, R_v — векторные евклидовы пространства конечных размерностей; P, Q — заданные компакты; $u = u(t)$, $v = v(t)$ — измеримые управления соответственно догоняющего и убегающего. Функция $F(z, u, v)$ непрерывна по всем аргументам и удовлетворяет условию Липшица по z

$$|F(z_1, u, v) - F(z_2, u, v)| \leq A|z_1 - z_2|. \quad (2)$$

Из сказанного вытекают соотношения

$$|F(z, u, v)| \leq B(|z| + 1), \quad |\dot{z}(z(t_0 + \tau), u, v)| \leq B(|z(t_0)| + 1)e^{B\tau}, \quad (3)$$

где B — константа, $z(t)$ — траектория, а также существование и единственность решения уравнения (1) в смысле Каратеодори ⁽⁶⁾ на полуинтервале $0 \leq t < \infty$.

Задано замкнутое множество $M \subset R$. Игра начинается из положения $z(0) = z_0$ и считается оконченной в момент t^* , когда впервые $z(t^*) \in M$. Целью убегающего является предотвращение попадания точки $z(t)$, $t \in [0, \infty)$ на M , для чего в каждый момент времени t он может использовать знание вектора $z(t)$.

При некоторых дополнительных формулируемых ниже предположениях получены достаточные, а для специального случая и необходимые условия убегания.

Б. Пусть в R задана гладкая замкнутая самонепересекающаяся гиперповерхность S , являющаяся замкнутым псевдомногообразием (см. ⁽⁷⁾, стр. 562); S разбивает R на две области S_- , S_+ , причем $M \subset (S_- \cup S)$. Относительно S дополнительно предполагается следующее: во-первых, S — дважды непрерывно дифференцируемая поверхность, радиусы кривизны нормальных сечений в каждой точке которой ограничены снизу константой $r^* > 0$ (см. ⁽⁸⁾); во-вторых, существует такое $r \in (0, r^*)$, что для любой точки $z' \in S$ найдется пара шаров радиуса r , касающихся поверхности S в этой точке с разных сторон и не имеющих с S никаких других общих точек, кроме z' .

Обозначим через $n'(z')$ единичный вектор, нормальный к S в точке $z' \in S$ и направленный в сторону S_+ :

$$z' + \xi n'(z') = z \in S_+, \quad \xi \in [0, r]. \quad (4)$$

Точка z' является для любой точки z из (4) единственной ближайшей точкой поверхности S . Точку z' , соответствующую z в силу (4), обозначим

$\varphi(z) = z'$. Множество точек z вида (4) для фиксированного ξ образует гладкую гиперповерхность $S(\xi)$ равного удаления от S . При этом вектор

$$n'(\varphi(z)), \quad z \in \Sigma(r), \quad \Sigma(\eta) = \bigcup_{0 \leq \xi \leq \eta} S(\xi), \quad \eta \leq r, \quad (5)$$

непрерывно зависит от z и является нормалью к $S(\xi)$ в точке $z \in S(\xi)$ (см. (8), 3 : 11).

Пусть $\rho(M', M'')$ — расстояние между множествами $M', M'' \in R$, а

$$K(z^*, r') = \{z \in R \mid |z - z^*| \leq r'\}.$$

Лемма. Если для единичного вектора n_0 , точки траектории $z(t_0) \in S_+$ и постоянного вектора $v_c \in Q$ выполняются соотношения

$$\min_{u \in P} (n_0, F(z(t_0), u, v_0)) \geq \delta > 0, \quad \rho(z(t_0), S) = \xi' < r, \quad n_0 = n'(\varphi(z(t_0))), \quad (6)$$

тогда для $v(t_0 + \tau) = v_0$, $\tau \in [0, \tau^*(z(t_0))]$, где

$$\tau^*(z(t_0)) = \min \left\{ 1, \frac{\delta}{2AW}, \frac{r - \xi'}{W} \cos \alpha \right\}, \quad \alpha = \arctg \frac{2W}{\delta}, \quad (7)$$

$$W = B(|z(t_0)| + 1)e^B,$$

выполняются включения

$$z(t_0 + \tau) \in Z(\tau) \subset K(\varphi(z(t_0)) + rn'(\varphi(z(t_0))), r) \quad (8)$$

и неравенство

$$\rho(Z(\tau), S) \geq \sigma(\tau) > 0, \quad (9)$$

$$Z(\tau) = \left\{ z \in R \mid \left(\frac{z - z(t_0)}{|z - z(t_0)|}, n_0 \right) \geq \cos \alpha, (z - z(t_0), n_0) \geq \frac{\delta}{2} \tau, \right.$$

$$\left. |z - z(t_0)| \leq W\tau \right\}, \quad \tau > 0, \quad Z(0) = z(t_0), \quad (10)$$

$\sigma(\tau)$ — возрастающая функция.

Движение фазовой точки, порожденное применением вышеупомянутого управления v_0 и удовлетворяющее в силу этого соотношению (8), назовем «движением в конусе», вершиной которого является точка $z(t_0)$, осью — луч, исходящий из $z(t_0)$ в направлении вектора n_0 ; угол между осью и образующей конуса равен α (см. (10), (7), (3)). Множество $Z(\tau)$, перемещающееся в конусе, осуществляет экстраполяцию движения фазовой точки на время τ^* вперед.

В. Далее всюду предполагается выполненным соотношение (см. (1))

$$F(z, u, v) = F_1(z, u) + F_2(z, v).$$

Теорема 1. Если $z_0 \in S_+$ и для всех $z' \in S$ выполняются неравенства

$$\min_{u \in P} \max_{v \in Q} (n'(z'), F(z', u, v)) \geq \varepsilon > 0, \quad (11)$$

где ε — константа, то убегающий, действуя согласно правилам игры, может предотвратить ее окончание на всем полуинтервале времени $0 \leq t < \infty$. Кроме того, убегающий может вести игру так, что, начиная с некоторого момента $\theta(z_0) \geq 0$, имеет место оценка

$$\rho(z(t), M) \geq \rho_0 - \kappa > 0, \quad t \geq \theta(t_0), \quad (12)$$

где

$$\rho_0 = \min \{r, \varepsilon / A\},$$

а κ — любое постоянное число из интервала $(0, \rho_0)$.

Если кроме перечисленных требований выполняется неравенство $r \geq \varepsilon / A$, число ρ_0 в (12) не может быть увеличено.

В основе доказательства теоремы лежат следующие соображения. Пусть максимум в (11) реализуется при $v = \tilde{v}(z')$. Из (2), (11), (12) и свойств S получаем

$$\min_{u \in P} (n'(z'), F(z'', u, \tilde{v}(z'))) \geq \varepsilon - A|z'' - z'|, \quad z' \in S; \quad (13)$$

$$\min_{u \in P} (n'(\varphi(z)), F(z, u, \tilde{v}(\varphi(z)))) \geq \varepsilon - A\left(\frac{\varepsilon}{A} - \kappa\right) = A\kappa = \delta > 0,$$

$$z \in \Sigma(\rho_0 - \kappa); \quad (14)$$

$$n'(\varphi(z)) = n'(z), \quad z \in S(\rho_0 - \kappa),$$

где $n'(z)$ — нормаль к поверхности $S(\rho_0 - \kappa)$ в точке z . Таким образом, на $S(\rho_0 - \kappa)$ выполнены условия леммы (ср. (14) и (6)). Пусть $z_0 \in S_+ \setminus \Sigma(\rho_0 - \kappa)$, а t_0 — первый момент, когда фазовая точка попадает на поверхность $S(\rho_0 - \kappa)$. Убегающий, применяя управление $v(t_0 + \tau) = \tilde{v}(\varphi(z(t_0)))$, $\tau \in [0, \tau^*(z(t_0))]$, заставляет фазовую точку «двигаться в конусе», вследствие чего она станет удаляться от поверхности $S(\rho_0 - \kappa)$, уходя в область $S_+ \setminus \Sigma(\rho_0 - \kappa)$ (см. (8), (9)). Убегающий не меняет своего управления до момента t_1 , когда фазовая точка снова оказывается на $S(\rho_0 - \kappa)$. В момент t_1 убегающий выбирает управление $v(t_1 + \tau) = \tilde{v}(\varphi(z(t_1)))$, $\tau \in [0, \tau^*(z(t_1))]$ и т. д. Если же $\rho(z_0, S) < \rho_0 - \kappa$, оказывается возможным, используя непрерывность функции (5), выбрать столь малые промежутки времени «движений в конусах», что фазовая точка станет удаляться от поверхности S со скоростью, ограниченной снизу некоторой положительной константой. Вследствие этого фазовая точка за конечное время $\theta(z_0)$ попадает в область $S_+ \setminus \Sigma(\rho_0 - \kappa)$.

Справедливость последнего утверждения теоремы вытекает из рассмотрения следующего примера:

$$z = u + |z|v; \quad R = R_u = R_v; \quad P = \{u \in R \mid |u| \leq 1\}, \quad Q = \{v \in R \mid |v| \leq 1\}, \\ M = \{z \in R \mid |z| \geq 1, 1\}, \quad S = \{z \in R \mid |z| = 1, 1\}.$$

Последовательным применением описанных выше «движений в конусах» можно доказать теорему об уклонении от встречи (см. (3)) для случая, когда в условии а) $k = 1$; при этом отпадает необходимость делать предположение о дискриминации догоняющего (т. е. убегающему для построения управления $v(t)$ не требуется знать управление $u(t)$).

Г. Пусть $M = R \setminus S_+$ и существует функция $\hat{v}(z) \in Q$, $z \in R$, обладающая следующими свойствами: во-первых, при подстановке $v = \hat{v}(z)$ в (1) вместе с любым допустимым управлением $u(t)$ получается векторное дифференциальное уравнение, имеющее при любом $z_0 \in R \setminus S_-$ единственное решение в смысле Каратеодори на полуинтервале $0 \leq t < \infty$; во-вторых, для $v(z)$ выполняются соотношения

$$\hat{v}(z) = v^*(\varphi(z)), \quad z \in \Sigma(\xi_0), \quad \xi_0 \in (0, r]; \quad (15)$$

$$\min_{u \in P} \max_{v \in Q} (n'(\varphi(z)), F(z, u, v)) = \min_{u \in P} (n'(\varphi(z)), F(z, u, v^*(\varphi(z))))), \quad z \in \Sigma(\xi_0),$$

где ξ_0 — некоторая константа. Тогда справедлива

Теорема 2. При $z_0 \in S_+$ выполнения неравенства

$$\min_{u \in P} (n'(z'), F(z', u, \hat{v}(z'))) \geq 0, \quad z' \in S, \quad (16)$$

необходимо и достаточно для предотвращения окончания игры на всем полуинтервале времени $[0, \infty)$.

Необходимость вытекает из того, что невыполнение требования (16) в некоторой точке $z'' \in S$ дает возможность догоняющему переместить фазовую точку $z(t') \in S_+$, достаточно близкую к z'' , в область S_- , воспользовавшись при этом управлением, вынуждающим фазовую точку «двигаться в конусе», вершиной которого является точка $z(t')$, а ось имеет направление вектора $-n'(\varphi(z(t')))$.

Достаточность доказывается с помощью оценки скорости приближения фазовой точки к поверхности S . Упомянутая оценка является следствием соотношений (15), (16), (13).

Институт математики
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
17 VI 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ Л. С. Понтрягин, Е. Ф. Мищенко, ДАН, 189, № 4, 721 (1969). ² Л. С. Понтрягин, ДАН, 191, № 2, 283 (1970). ³ Л. С. Понтрягин, Е. Ф. Мищенко, Дифференциальные уравнения, 7, № 3, 436 (1971). ⁴ В. Н. Лагунов, Дискретный анализ, Новосибирск, в. 11, 61 (1967). ⁵ В. Н. Лагунов, Информационные материалы, М., № 5 (42), 88 (1970). ⁶ Д. Сансоне, Обыкновенные дифференциальные уравнения, 2, М., 1954. ⁷ П. С. Александров, Комбинаторная топология, М., 1947. ⁸ В. Н. Лагунов, Сибирск. матем. журн., 1, № 2, 205 (1960).