Доклады Академии наук СССР
1972. Том 202, № 3

УДК 519. 217 *МАТЕМАТИКА*

В. А. МАЛЫШЕВ

КЛАССИФИКАЦИЯ ДВУМЕРНЫХ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ СЛУЧАЙНЫХ БЛУЖДАНИЙ И ПОЧТИ ЛИНЕЙНЫЕ ПОЛУМАРТИНГАЛЫ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 17 VI 1971)

В ([1]) аналитическими методами были получены условия эргодичности для некоторых случайных блужданий в положительном квадранте плоскости. В связи с этим А. Н. Колмогоровым был задан * вопрос, нельзя ли получить эти результаты чисто вероятностными методами. В настоящей работе дается положительный ответ на этот вопрос в существенно более общей ситуации. В частности, ослабляется условие ограниченности скачков, однородности, марковости. Получены также условия транзиентности соответствующих случайных блужданий. Метод допускает очевидное обобщение на случай непрерывного времени и пространства состояний, а некоторые построения можно провести и для случая числа измерений, большего двух.

Основой работы является объясняемое ниже геометрически наглядное построение полумартингала, являющегося «почти линейной» функцией на множестве состояний соответствующей цепи Маркова.

1. Формулировка основного результата. Рассмотрим однородную цепь Маркова $\mathscr{L}$ с дискретным временем, множеством состояний которой является множество $\mathbf{Z}_{++} = \{(i, j): i, j \geqslant 0 \text{ целые}\}$. Будем обозначать через $M^{ij} = (M_x^{ij}, M_y^{ij})$ вектор среднего скачка за один шаг из точки (i, j) с компонентами M_x^{ij} вдоль оси x и M_y^{ij} вдоль оси y. Будет предполагаться выполненным следующее условие однородности: $M^{ij} = M^{kl} = M = (M_x, M_y)$, если $i, j, k, l \geqslant 1$; $M^{i0} = M^{k0} = M' = (M_x', M_y')$ для $i, k \geqslant 1$ и $M^{0i} = M^{0k} = M''$ для $i, k \geqslant 1$. Это условие может, конечно, нарушаться в конечном числе точек, но удобно предположить, что все состояния нашей цепи Маркова сообщаются между собой, $M_y', M_x'' \neq 0$ и скачки за один шаг равномерно ограничены.

Теорема 1. А) *Если $M_x > 0$, $M_y \geqslant 0$, то не существует стационарного распределения;*

В) *если $M_x, M_y < 0$, то $\mathscr{L}$ эргодична* **, *если и только если*

$$M_xM_y' - M_yM_x' < 0, \quad M_yM_x'' - M_xM_y'' < 0; \tag{1}$$

возвратна, если

$$M_xM_y' - M_yM_x' \leqslant 0, \quad M_yM_x'' - M_xM_y'' \leqslant 0, \tag{2}$$

и транзиентна в остальных случаях;

С) *если $M_x \geqslant 0$, $M_y < 0$, то $\mathscr{L}$ эргодична, если и только если*

$$M_xM_y' - M_yM_x' < 0; \tag{3}$$

возвратна, если

$$M_xM_y' - M_yM_x' \leqslant 0, \tag{4}$$

и транзиентна в остальных случаях;

---

* На секции теории вероятностей Московского математического общества.

** Ненулевые возвратные периодические цепи считаются эргодическими (задача вычисления периода тривиальна).

Д) *симметричен случаю* С).

Тем самым в случаях В) — Д) дается полная классификация соответствующих цепей Маркова. Первый шаг доказательства — лемма о полумартингалах — показывает, что марковость несущественна в некотором не уточняемом здесь смысле.

2. Лемма о полумартингалах. Пусть дана последовательность случайных величин $S_0, S_1, S_2, \ldots$, причем с вероятностью 1 разности $S_i - S_{i-1}$ равномерно ограничены по модулю и $S_0 = \mathrm{const}$. Обозначим через t случайное время первого достижения неотрицательной полуоси, т. е. $t = 0$, если $S_0 \leqslant 0$, и $t = n$, если $S_n \leqslant 0$, $S_i > 0$ при $i = 0, 1, \ldots, n-1$.

Лемма 1. 1) *Если для некоторого* $\varepsilon > 0$

$$M(S_n / S_{n-1}, \ldots, S_0) \leqslant S_{n-1} - \varepsilon, \tag{5}$$

то $Mt < \infty$.

2) *Если для некоторого* $\varepsilon > 0$

$$M(S_n / S_{n-1}, \ldots, S_0) \geqslant S_{n-1} + \varepsilon, \tag{6}$$

то $t = \infty$ *с вероятностью* 1.

3) *Если*

$$M(S_n / S_{n-1}, \ldots, S_0) = 0, \tag{7}$$

то $Mt = \infty$.

Доказательство этих утверждений основано на стандартной вероятностной технике, и мы его опускаем.

3. Полумартингалы, ассоциированные с цепями Маркова. Пусть дана цепь Маркова со счетным множеством состояний A, одним существенным классом состояний и переходными вероятностями $p_{\alpha\beta}$. Пусть $f(\alpha)$ — вещественная функция на A такая, что $f(\alpha) > c > -\infty$.

Следствие 1. *Пусть для некоторого* $c_1 > c$ *множество состояний таких, где* $c_1 > f(\alpha) > c$, *конечно и для любого* $\alpha \in A$ *такого, что* $f(\alpha) \geqslant c_1$, *имеет место*

$$\sum_{\beta} p_{\alpha\beta} f(\beta) \leqslant f(\alpha) - \varepsilon \tag{8}$$

для некоторого $\varepsilon > 0$.

Тогда цепь Маркова эргодична.

В несколько измененной формулировке это следствие было известно ([2]); в ряде работ такие функции f называются функциями Ляпунова (см., например, ([3])).

Утверждения 2 и 3 леммы 1 также имеют соответствующие следствия. Вместо условий (6) и (7) имеют место соответственно

$$\sum p_{\alpha\beta} f(\beta) \geqslant f(\alpha) + \varepsilon; \tag{9}$$

$$\sum p_{\alpha\beta} f(\beta) \geqslant f(\alpha). \tag{10}$$

4. Принцип локальной ε-линейности. Пусть A есть подмножество эвклидова пространства R^n и $f(\alpha)$ индуцирована некоторой функцией $f(x)$ на R^n. Обозначим через D_c^- множество $\{x\colon f(x) < c, x \in R^n\}$ и $D_c^+ = \{x\colon f(x) > c\}$.

Пусть длины (в R^n) скачков за один шаг из α ограничены некоторым числом d_α. Для точки $\alpha \in A \subset R^n$ обозначим через C_α выпуклую оболочку множества точек $\beta \in A$, для которых $\|\alpha - \beta\| \leqslant d_\alpha$.

Если функция f линейна, то условия (8), (9) и (10) выполнены тогда и только тогда, когда вектор среднего скачка за один шаг, отложенный из α, соответственно направлен в сторону $D^-_{f(\alpha)}$, лежит в гиперплоскости $f(x) = f(\alpha)$ или направлен в сторону $D^+_{f(\alpha)}$.

Если конец вектора среднего скачка, отложенного из α, принадлежит множеству $D^{-}_{f(\alpha)-5\varepsilon}$

$$\inf_{\varphi} \sup_{\|\tilde{\alpha}-\alpha\| \leqslant d_{\alpha}} |f(\tilde{\alpha}) - \varphi(\tilde{\alpha})| \leqslant \varepsilon,$$

где inf берется по всем линейным функциям φ, то условие (8) выполняется.

Это последнее утверждение, а также аналогичное ему для случая вектора среднего скачка, направленного в сторону $D^{f(\stackrel{+}{\alpha})}$, будем называть принципом ε-линейности. Его значение заключается в том, что вместо выполнения условия (8) требуется выполнение геометрически наглядного условия трансверсальности поля векторов среднего скачка и линий уровня функции f.

5. Построение ε-линейных полумартингалов. Мы покажем здесь, как склеиваются локально ε-линейные куски в доказательстве основной теоремы при построении искомой функции f. Это склеивание производится в разных случаях различными способами.

Пусть сначала $M_x > 0$, $M_y < 0$ и выполнено условие (3). Обозначим через e_x и e_y единичные векторы, направленные соответственно по оси x и y. Углы между M и e_x и между $-M'$ и e_x обозначим соответственно φ и φ'. Очевидно,

$$\operatorname{tg} \varphi = -M_y / M_x > \operatorname{tg} \varphi' = M_y' / |M_x'|, \quad \varphi > \varphi'. \tag{11}$$

Проведем параллельные прямые, пересекающиеся с осью x под углом ψ, $\varphi > \psi > \varphi'$ (т. е. чуть повернутые прямые, параллельные вектору M). Рассмотрим линейную функцию f_ψ, линиями уровня которой являются эти параллельные прямые. Из (11) очевидно, что M и M' направлены в сторону $D^{-}_{f_\psi}$ (будем считать, что $f_\psi > 0$ с точностью до аддитивной константы на $\mathbf{Z}_{++}$). Если кроме того и вектор M'' направлен в сторону D_{f_ψ}, то доказательство закончено. В общем случае построение усложняется. Рассмотрим окружность O достаточно большого радиуса $1/\delta$ с центром в нижней полуплоскости и пересекающуюся с положительной полуосью y под углом $\varphi'' - \delta$, где φ'' — угол между M'' и e_y (направление на окружности будем считать по часовой стрелке).

Для данной точки $(0, y) \in R_{++}^2$ рассмотрим кривую $l_y \in R_{++}^2$. Она состоит из куска сдвинутой в направлении e_y окружности O, пересекающегося с осью y под углом $\varphi'' - \delta$, до точки r_y, где r_y — точка, в которой касательная к этой окружности направлена под углом ψ к e_x. Далее, l_y образована отрезком прямой, параллельной этой касательной от точки r_y до пересечения с положительной полуосью x. Ясно, что начиная с некоторого $y > 0$, такая точка r_y существует.

Определим функцию $f(r) = y$ при $r \in l_y \subset R_{++}^2$. Из построения ясно, что принцип локальной ε-линейности выполняется. Поэтому случайное блуждание в данном случае эргодично.

При $M_x M_y' - M_y M_x' > 0$ линии уровня оказываются выпуклыми в противоположную сторону. В случае $M_x M_y' - M_y M_x' = 0$ система прямых выбирается строго параллельной вектору $M(M')$. При доказательстве возвратности система окружностей такая же, как в первом случае, а при доказательстве отсутствия эргодичности — такая же, как во втором.

При доказательстве транзиентности в случае В) ограниченность снизу функции f не обязательна. В остальном доказательства проводятся вполне аналогично.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
3 VI 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. А. Малышев, Случайные блуждания. Уравнения Винера — Хопфа в четверти плоскости. Автоморфизмы Галуа, М., 1970. [2] F. C. Foster, Ann. Math. Stat., 24, 355 (1953). [3] Р. З. Хасьминский, Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных изменениях их параметров, «Наука», 1969.