Доклады Академии наук СССР
1971. Том 200, № 3

УДК 517.535.4

МАТЕМАТИКА

В. С. АЗАРИН

О РЕГУЛЯРНОСТИ РОСТА ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком Ю. В. Линником 23 III 1971)

Пусть F_ρ — класс целых функций порядка ρ и нормального типа и $f(z) \in F_\rho$.

Обозначим

$$M(r, f) = \max_{\varphi \in (0, 2\pi)} \ln |f(re^{i\varphi})|,$$

$$T(r, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln^+ |f(re^{i\varphi})| \, d\varphi,$$

$n(r, f)$ — число нулей $f(z)$ в круге K_r радиуса r.

Введем следующие характеристики роста функции и распределения ее нулей:

$$\overline{M}[f] = \limsup_{r\to\infty} M(r, f) r^{-\rho}, \quad \underline{M}[f] = \liminf_{r\to\infty} M(r, f) r^{-\rho};$$

$$\overline{T}[f] = \limsup_{r\to\infty} T(r, f) r^{-\rho}, \quad \underline{T}[f] = \liminf_{r\to\infty} T(r, f) r^{-\rho};$$

$$\overline{\Delta}[f] = \limsup_{r\to\infty} n(r, f) r^{-\rho}, \quad \underline{\Delta}[f] = \liminf_{r\to\infty} n(r, f) r^{-\rho}.$$

Все эти величины, как известно, конечны для $f \in F_\rho$.

Рассмотрим следующие свойства, которыми могут обладать функции $f \in F_\rho$:

R_1) $\overline{M}[f] = \underline{M}[f]$;

R_2) $\overline{T}[f] = \underline{T}[f]$;

R_3) $\overline{\Delta}[f] = \underline{\Delta}[f]$.

Эти свойства характеризуют регулярность роста функции и распределения ее нулей.

Функции $f \in F_\rho$, для которых выполняется свойство R_1, называются функциями совершенно регулярного роста (perfectly regular growth), а свойство R_3 означает существование плотности нулей.

Независимость свойств R_1 и R_3 в классе F_ρ показана С. Шахом [4]. А. А. Гольдберг [2] показал независимость свойств R_1 и R_2, ответив тем самым на один из вопросов известного списка [3].

Имеет место следующая

Теорема 1. *Пусть $\rho > 1/2$ и $\rho \neq 1$.*

В классе F_ρ свойства R_1, R_2, R_3 независимы в совокупности.

Это означает следующее. Пусть $\overline{R}_i$ — невыполнение свойства R_i. Тогда для любого разбиения множества индексов $\{1, 2, 3\}$ на два подмножества A и B найдется такая функция $f \in F_\rho$, что она обладает свойствами R_α для $\alpha \in A$ и свойствами $\overline{R}_\beta$ для $\beta \in B$.

Обозначим $h_f(\varphi)$, $\underline{h}_f(\varphi)$ соответственно, верхний и нижний индикаторы $f(z) \in F_\rho$, определенные равенствами [6, 5]

$$h_f(\varphi) = \limsup_{r\to\infty} \ln |f(re^{i\varphi})| r^{-\rho},$$

$$\underline{h}_f(\varphi) = \sup_C \liminf_{\substack{r\to\infty \\ re^{i\varphi} \notin C}} \ln |f(re^{i\varphi})| r^{-\rho},$$

где C обозначает C^0-множество, т. е. множество кружков K_j на плоскости таких, что их радиусы δ_j и центры Z_j удовлетворяют условию

$$\limsup_{R\to\infty} \frac{1}{R} \sum_{|Z_j|<R} \delta_j = 0.$$

Индикатор $h_f(\varphi)$ является ρ-тригонометрически выпуклой функцией (ρ-т.в.ф.) (см., например, ([4]), стр. 75).

Теорема 2. *Пусть h_1 и h_2 — две ρ-т.в.ф.*

Существует $f(z) \in F_\rho$, для которой одновременно выполняются равенства

$$h_f(\varphi) = \max [h_1(\varphi), h_2(\varphi)],$$
$$\underline{h}_f(\varphi) = \min [h_1(\varphi), h_2(\varphi)].$$

Обозначим через R_φ такое свойство функции $f \in F_\rho$:

R_φ) $h_f(\varphi) = \underline{h}_f(\varphi)$.

Определение. Множество $\Theta \subset [0, 2\pi]$ называется множеством вполне регулярного роста для функции $f \in F_\rho$, если свойство R_φ выполняется для всех $\varphi \in \Theta$ и не выполняется для всех $\varphi \in$ $\in [0, 2\pi] \setminus \Theta$.

В работе ([7]) было показано, что любое замкнутое множество Θ может служить множеством вполне регулярного роста для некоторой функции $f \in F_\rho$. Это утверждение можно рассматривать как определенного рода «независимость в совокупности» набора свойств R_φ. Его можно также получить с помощью теоремы 2, так как имеет место следующая

Теорема 3. *Пусть $\rho > 0$. Для любого замкнутого множества $\Theta \subset$ $\subset [0, 2\pi]$ найдутся две ρ-т.в.ф. h_1 и h_2 такие, что выполняются соотношения*

T_φ) $h_1(\varphi) = h_2(\varphi)$, $\varphi \in \Theta$;

T_φ) $h_1(\varphi) \neq h_2(\varphi)$, $\varphi \in [0, 2\pi] \setminus \Theta$.

Харьковский институт радиоэлектроники

Поступило 22 III 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] S. M. Shach, J. London Math. Soc., 14, 293 (1939). [2] А. А. Гольдберг, Докл. АН УССР, № 4, 443 (1963). [3] Исследовательские проблемы, Сборн. пер. Математика, 7, № 5, 133 (1963). [4] Б. Я. Левин, Распределение корней целых функций, М., 1956. [5] А. А. Гольдберг, В сборн. Современные проблемы теории аналитических функций, Ереван, 1965, стр. 88. [6] Phragmen, Lindelöf, Acta math., 31 (1909). [7] В. С. Азарин, Матем. сборн., 79, в. 4, 463 (1969).