Доклады Академии наук СССР
1971. Том 200, № 5

УДК 517.948:513.88+517.92 *МАТЕМАТИКА*

Б. Н. САДОВСКИЙ

ПРИМЕНЕНИЕ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ МЕТОДОВ В ТЕОРИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА

(Представлено академиком П. С. Александровым 17 II 1971)

В последние годы ряд советских и зарубежных авторов предприняли попытки распространить теорию степени отображения (см. ([1-3])) на более широкие классы операторов. Одним из таких классов является множество отображений $I-f$ с так называемыми уплотняющими операторами f. Приведем (в удобный для дальнейшего форме) соответствующие определения из ([4]).

Определение 1. Вещественная функция χ ограниченного множества в линейном нормированном пространстве E называется мерой некомпактности, если для любого ограниченного множества $\Omega\subseteq E$ справедливо равенство $\chi(\overline{\mathrm{co}}\,\Omega)=\chi(\Omega)$, где $\overline{\mathrm{co}}\,\Omega$ означает замыкание выпуклой оболочки множества Ω.

В частности, мерой некомпактности в любом линейном нормированном пространстве E является функция

$$\alpha(\Omega)=\{\varepsilon>0\colon \Omega \text{ имеет в } E \text{ конечную } \varepsilon\text{-сеть}\}. \tag{1}$$

Определение 2. Пусть E — банахово пространство; $D\subseteq E$; χ — мера некомпактности в E. Непрерывный оператор $f\colon D\to E$ называется χ-уплотняющим, если для любого ограниченного, но не вполне ограниченного множества $\Omega\subseteq D$ имеет место неравенство

$$\chi[f(\Omega)]<\chi(\Omega).$$

Первые частные классы нелинейных уплотняющих операторов * рассматривались, по-видимому, М. А. Красносельским ([7]), G. Darbo ([8]) **, Р. Л. Фрум-Кетковым ([9]) и автором ([10]). Теория вращения векторных полей (степени отображения) была сначала обобщена лишь на α-уплотняющие векторные поля в «достаточно хороших» банаховых пространствах ([11]) (см. также ([9])). Затем ([12]) было показано, что α-уплотняющие операторы обладают компактными сужениями на выпуклые инвариантные множества; это позволило в ряде задач, связанных с неподвижными точками уплотняющих операторов, использовать развитую Ю. Г. Борисовичем ([13]) теорию «относительного вращения» вполне непрерывных векторных полей. Полное построение теории вращения уплотняющих векторных полей дано в ([4]); при этом фактически удалось обобщить основные результаты теории на существенно более широкий класс так называемых предельно компактных операторов в произвольных локально выпуклых пространствах. Аналогичные результаты были получены R. D. Nussbaum ([14]) для класса уплотняющих операторов, определенного G. Darbo в ([8]).

* Теория линейных уплотняющих операторов построена в ([5], [6]); новые результаты получены А. Седаевым и M. Shechter.

** За сообщение об этой работе и другую ценную информацию автор благодарен Йозефу Данешу.

В настоящей статье изучаются ω-периодические уравнения (2) с ω-периодической правой частью. Как и в теории обыкновенных дифференциальных уравнений ([15]), задачу о существовании периодических решений удается свести к задаче о неподвижных точках специального интегрального оператора (п. 1) или оператора сдвига (п. 2). Основная трудность по сравнению с обыкновенными дифференциальными уравнениями состоит в том, что эти операторы не вполне непрерывны (см., например, ([16], [17])): Оказывается, однако, что при некоторых ограничениях на правую часть, из которых наиболее жесткое — условие Липшица по последнему аргументу с константой $k < 1$, эти операторы являются уплотняющими относительно специально конструируемых мер некомпактности. Этот факт позволяет применить в задаче о существовании периодических решений аппарат теории вращения (п. 3).

Иной подход к изучаемой задаче был предложен в цикле интересных работ В. И. Рожкова (см., например, ([18])).

1. Рассматривается уравнение

$$x'(t) = f(t, x_t, x_t'). \tag{2}$$

Всюду в дальнейшем предполагается, что правая часть этого уравнения удовлетворяет следующим условиям.

А) Оператор f: $R^1 \times C(-h, 0) \times C(-h, 0) \to R^n$ $(h > 0)$ ω-периодичен по первому аргументу $(\omega > 0)$, непрерывен по совокупности первых двух аргументов при любом фиксированном значении третьего и удовлетворяет условию Липшица с константой $k < 1$ по третьему аргументу.

Как обычно, $x_t(s) = x(t+s)$ $(-h \leqslant s \leqslant 0)$. Через $C(a, b)$, $C^1(a, b)$ обозначаются соответственно пространства непрерывных или непрерывно дифференцируемых функций x: $[a, b] \to R^n$ с нормами $\|x\|_C = \max\limits_{t \in (a, b)} \|x(t)\|_{R^n}$, $\|x\|_{C^1} = \|x\|_C + \|x'\|_C$, через C_ω (соответственно C_ω^1) — пространство непрерывных (непрерывно дифференцируемых) ω-периодических функций x: $R^1 \to R^n$. Для каждой функции $x \in C_\omega^1$ определим функцию Jx: $R^1 \to R^n$ следующим образом:

$$(Jx)(t) = x(0) + \int_0^t f(s, x_s, x_s')\, ds - \left(\frac{1}{\omega} t - \frac{1}{2}\right) \int_0^\omega f(s, x_s, x_s')\, ds. \tag{3}$$

Меру некомпактности Ψ в пространстве C_ω^1 зададим формулой $\Psi(\Omega) = \alpha(\Omega')$. Здесь $\Omega' = \{x' : x \in \Omega\}$, а α — мера некомпактности (1) в пространстве C_ω.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* А).

Тогда оператор J действует в пространстве C_ω^1; его неподвижные точки и только они являются ω-периодическими решениями уравнения (2); *оператор J является Ψ-уплотняющим.*

2. В этом пункте мы рассмотрим уравнение

$$x'(t) = f(t, x_t, x_t') + [x_0'(0) - f(0, x_0, x_0')]\, \nu(t), \tag{4}$$

где ν — непрерывная скалярная функция, равная 1 при $t = 0$ и 0 при $|t| \geqslant \varepsilon_0$ $(\varepsilon_0 < \omega)$. Нам потребуются дополнительные ограничения на f.

Б) f: $R^1 \times C(-h, 0) \times \hat{C}(-h, 0) \to R^n$, где $\hat{C}(-h, 0)$ — пространство кусочно-непрерывных функций x: $[-h, 0] \to R^n$ с нормой $\|x\|_{\hat{C}} = \sup\limits_{t \in (-h, 0)} \|x(t)\|_{R^n}$. Условие Липшица с константой k выполнено на новой области определения. Для любых функций $x \in C(-h, T)$, $y \in \hat{C}(-h, T)$, $(T > 0)$ функция $f(t, x_t, x_t')$ $(0 \leqslant t \leqslant T)$ кусочно-непрерывна.

В) $\forall (\varepsilon > 0;\ R > 0;\ K \subset C(-h, 0)$: K — компакт$)$ $\exists (\delta > 0)$ $\forall (t, u_1, u_2, v$: $|t| \leqslant R$; $\|v\|_{\hat{C}} \leqslant R$; $u_1, u_2 \in K$, $\|u_1 - u_2\|_C \leqslant \delta)$ $[\|f(t, u_1, v) - f(t, u_2, v\| \leqslant \varepsilon]$.

Отметим сразу, что условия Б) и В) выполнены, например, для оператора f, имеющего вид $f(t, u, v) = F[t, u, v(t_1), \ldots, v(t_q)]$ (t_i — фиксированные точки на $[-h, 0]$), где оператор F: $R^1 \times C(-h, 0) \times (R^n)^q \to R^n$ непрерывен и удовлетворяет соответствующему условию Липшица по последним q-аргументам. Можно указать примеры и более общего характера.

Определим теперь оператор сдвига U_T по траекториям уравнения (4) за время $T > 0$. Будем считать, что функция $x \in C^1(-h, 0)$ принадлежит области определения $D(T)$ оператора U_T, если уравнение (4) имеет на отрезке $[-h, T]$ единственное непрерывно дифференцируемое решение $u(x)$, совпадающее на $[-h, 0]$ с x. Сам оператор U_T определяется равенством $U_T x = [u(x)]_T$. Аналогично определяются оператор сдвига V_T по траекториям уравнения (2) и его область определения $D_0(T)$.

В пространстве $C^1(-h, 0)$ рассмотрим меру некомпактности χ: $\chi(\Omega) = \alpha(\varphi\Omega')$. Здесь α — мера некомпактности (1) в пространстве $C(-h, 0)$; φ: $[-h, 0] \to (0, +\infty)$ — фиксированная непрерывная функция; $\varphi\Omega' = \{\varphi \cdot x' : x \in \Omega\}$.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* А), Б) *и* В). *Пусть при некотором $T > 0$ множество $\{u(x) : x \in \Omega\}$ ограничено в $C^1(-h, T)$ для любого ограниченного множества $\Omega \subseteq D(T)$.*

Тогда существует зависящая лишь от k функция φ такая, что U_T является χ-уплотняющим.

Было бы удобно, если бы оператор сдвига был определен на всем пространстве $C^1(-h, 0)$. Именно с этой целью в правую часть уравнения (4) введено второе слагаемое.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия* А) *и* Б) *и пусть, дополнительно, оператор f удовлетворяет условию Липшица по второму аргументу.*

Тогда $D(T) = C^1(-h, T)$ при любом $T > 0$; существует зависящая только от k функция φ такая, что оператор U_T является χ-уплотняющим; неподвижные точки оператора U_ω и только они являются сужениями на отрезок $[-h, 0]$ ω-периодических решений уравнения (2).

Условие Липшица по второму аргументу в этой теореме можно заменить менее ограничительными требованиями; на точных формулировках мы не останавливаемся.

Наряду с уравнением (4) рассмотрим уравнение
$$x'(t) = f(t, x_{t-\omega}, x'_{t-\omega}) + [x'_0(0) - f(0, x_{-\omega}, x'_{-\omega})]\,\nu(t), \tag{5}$$
«фазовым пространством» которого является уже не $C^1(-h, 0)$, а $C^1(-h, -\omega, 0)$. Пусть W_ω — оператор сдвига по траекториям уравнения (5) за время ω; его область определения лежит в $C^1(-h, -\omega, 0)$. Через χ_1 обозначим функцию, определяемую аналогично χ с заменой $[-h, 0]$ на $[-h, -\omega, 0]$.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия* А), Б) *и* В).

Тогда оператор W_ω определен на всем пространстве $C^1(-h, -\omega, 0)$ и при подходящем выборе (в зависимости от k) функции φ является χ_1-уплотняющим; его неподвижные точки и только они порождают ω-периодические решения уравнения (2).

Если не требовать выполнения условий Б) и В), результаты, аналогичные теоремам 2—4, удается получить лишь при более существенных ограничениях на k.

3. Рассмотрим уравнение
$$x'(t) = f(\lambda, t, x_t, x_t') \tag{6λ}$$
с параметром λ, принимающим значения из отрезка $[a, b]$. Оператор (3) для уравнения (6λ) обозначим через J_λ. Вращение векторного поля $I - J_\lambda$ на границе ограниченной области $\Omega \subset C_\omega^1$, будем обозначать через $\mathrm{Ind}(\lambda, \Omega)$. Из результатов п. 1 и теории вращения уплотняющих векторных полей вытекает

Теорема 5. *Пусть оператор f: $[a, b] \times R^1 \times C(-h, 0) \times C(-h, 0) \to R^n$ непрерывен, удовлетворяет условию Липшица с константой $k < 1$*

по последнему аргументу и ω-периодичен по второму аргументу. Пусть на границе ограниченной области $\Omega \subset C_{\omega}^1$ ни одно из уравнений (6λ) не имеет ω-периодических решений.

Тогда величина $\operatorname{Ind}(\lambda, \Omega)$ *определена при всех λ и не зависит от λ. В частности, если $\operatorname{Ind}(a, \Omega) \neq 0$, то уравнение (6$\lambda$) при любом $\lambda \in [a, b]$ имеет хотя бы одно ω-периодическое решение, лежащее в области Ω.*

Не останавливаясь на формулировке аналогичного принципа применительно к оператору сдвига, приведем два конкретных признака, вытекающих из этих общих теорем.

Теорема 6. *Пусть правая часть уравнения (6λ) имеет вид $f(\lambda, t, x_t, x_t') = A(t, x_t, x_t') + \lambda\varphi(t, x_t, x_t')$, где оператор A: $R^1 \times C(-h, 0) \times C(-h, 0) \to R^n$ непрерывен и ω-периодичен по первому аргументу, аддитивен и однороден по второму и третьему аргументам и удовлетворяет неравенству $\|A(t, u, v)_{R^n} \leqslant d\|u\|_C + k\|v\|_C$ $(k < 1)$; оператор φ: $R^1 \times C(-h, 0) \times C(-h, 0) \to R^n$ непрерывен, ω-периодичен по t, удовлетворяет условию Липшица с константой q по третьему аргументу и при $\|u\|_{C^1} \geqslant R_0$ удовлетворяет неравенству $\|\varphi(t, u, u')_{R^n} \leqslant q\|u\|_{C^1}$. Пусть, наконец, при $\lambda = 0$ уравнение (6λ) не имеет нетривиальных ω-периодических решений.*

Тогда существует (зависящее лишь от A и q) $\lambda_0 > 0$ такое, что при любом $\lambda \in [-\lambda_0, \lambda_0]$ уравнение (6λ) имеет хотя бы одно ω-периодическое решение.

Теорема 7. *Пусть правая часть уравнения (6λ) имеет вид $f(\lambda, t, x_t, x_t') = B[t, x(t)] + \lambda\psi(t, x_t, x_t')$, где оператор B: $R^1 \times R^n \to R^n$ ω-периодичен по t и непрерывен, а оператор ψ: $R^1 \times C(-h, 0) \times C(-h, 0) \to R^n$ ω-периодичен по t, непрерывен и удовлетворяет условию Липшица с константой q по послднему аргументу. Пусть оператор $\psi(\cdot, \cdot, 0)$ ограничен на каждом ограниченном множестве. Допустим, что получающееся при $\lambda = 0$ обыкновенное дифференциальное уравнение допускает правильную направляющую функцию Φ ненулевого индекса (см. ([15]), стр. 131). Наконец, пусть существуют R_0 и c такие, что при $\|u(0)\|_{R^n} \geqslant R_0$ выполняется неравенство $\|\psi(t, u, u')\|_{R^n} \leqslant c\|B(t, u(0))\|_{R^n}$.*

Тогда существует зависящее лишь от Φ, q и c положительное число λ_0 такое, что при любом $\lambda \in [-\lambda_0, \lambda_0]$ уравнение (6λ) имеет хотя бы одно ω-периодическое решение.

Интерес автора к описанным задачам возник в беседах с В. Ш. Бурдом; с ним же подробно обсуждались основные результаты. Автор выражает глубокую благодарность своему руководителю М. А. Красносельскому за постоянное внимание, многочисленные полезные обсуждения и советы.

Воронежский государственный университет
им. Ленинского комсомола

Поступило
10 II 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] П. С. Александров, Комбинаторная топология, М., 1947. [2] Ж. Лере, Ю. Шаудер, УМН, 1, № 3—4 (1946). [3] М. А. Красносельский, Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений, М., 1956. [4] Б. Н. Садовский, Сборн. Пробл. матем. анал. сложн. систем, в. 2, Воронеж, 1968, стр. 89. [5] Л. С. Гольденштейн, И. Ц. Гохберг, А. С. Маркус, Уч. зап. Кишиневск. унив., 29, 29 (1957). [6] Л. С. Гольденштейн, А. С. Маркус, Сборн. Исслед. по алгебре и матем. анализу, Кишинев, 1965. [7] М. А. Красносельский, УМН, 10, 1, 123 (1955). [8] G. Darbo, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 24, 84 (1955). [9] Р. Л. Фрум-Кетков, ДАН, 82, № 4, 1229 (1967). [10] Б. Н. Садовский, Функц. анализ и его прилож., 1, 2, 74 (1967). [11] Г. М. Вайникко, Б. Н. Садовский, Сборн. Пробл. матем. анал. сложн. систем, в. 2, 84 (1968). [12] Ю. Г. Борисович, Ю. И. Сапронов, ДАН, 183, № 1, 18 (1969). [13] Ю. Г. Борисович, ДАН, 153, № 1 (1963). [14] R. D. Nussbaum, Bull. Am. Math. Soc., 75, 490 (1969). [15] М. А. Красносельский, Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений, М., 1966. [16] А. М. Зверкин, Сборн. Пятая летняя матем. школа, Киев, 1968, стр. 307. [17] А. С. Турбабин, Сборн. тр. аспирантов, Воронеж, 1969, стр. 149. [18] В. И. Рожков, Дифференциальные уравнения, 7, № 3, 446 (1971).