Доклады Академии наук СССР
1971. Том 200, № 5

МАТЕМАТИКА

Академик АН УзССР Т. А. САРЫМСАКОВ, Дж. ХАДЖИЕВ

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ МОДУЛИ НАД ПОЛУПОЛЯМИ I РОДА

Статья посвящена начатому в работах ([1-3]) изучению топологических модулей над полуполями I рода. Ниже мы придерживаемся определений и обозначений работ ([1-4]).

Для простоты дальше в качестве основного полуполя берется тихоновское полуполе; большинство результатов без изменений переносится и на случай произвольного топологического полуполя I рода.

1. Пусть для каждого $q \in \Delta$ X_q — модуль над полуполем E_q и $\prod\limits_q X_q$ $\left(\sum\limits_q X_q\right)$ прямое произведение (сумма) модулей X_q. $\sum\limits_q X_q$ и $\prod\limits_q X_q$ превращаются в модули над полуполем $E = \prod\limits_q E_q$, если операции сложения и умножения на элементы E ввести покоординатно.

В случае, когда X_q — топологические модули, модули $\prod\limits_q X_q$ и $\sum\limits_q X_q$ будем рассматривать с тихоновской топологией.

Теорема 1. *Пусть X — модуль над полуполем E, Δ — множество неприводимых идемпотентов E.*

Тогда для каждого $q \in \Delta$ qX является векторным пространством над полем действительных чисел и $\sum\limits_q qX \subseteq X \subseteq \prod\limits_q qX$.

Теорема 2. *Пусть X — топологический E-модуль.*

Тогда: 1) *для каждого $q \in \Delta$ $\overline{qX}$ — топологическое векторное пространство*; 2) $\sum\limits_q qX \subseteq X \subseteq \prod\limits_q qX$; 3) $\overline{\sum\limits_q qX} = \overline{X} = \prod\limits_q q\overline{X}$. *В частности, если X — полный отделимый топологический модуль, то* $X = \prod\limits_q qX$.

Замечание. Второе утверждение этой теоремы отличается от аналогичного утверждения теоремы 1 тем, что оба E-мономорфизма в нем являются топологическими отображениями.

Множество A E-модуля X назовем E-выпуклым, если каковы бы ни были $x, y \in E$, $\lambda \in E$ имеем $\lambda x + (1 - \lambda) y \in A$ для $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$.

Топологический E-модуль назовем локально выпуклым, если в нем существует базис E-выпуклых окрестностей нуля.

Теорема 3. *Всякий нормированный модуль над парой (E', E) является отделимым локально выпуклым E-модулем.*

Обратно, всякий отделимый локально выпуклый E-модуль нормируем над некоторой парой (E', E).

Эта теорема является обобщением известной теоремы А. Н. Колмогорова ([5]) и предложения 12.4 работы ([1]).

Пусть X — локально выпуклый E-модуль. Множество всех E-линейных отображений X в E образует E-модуль; назовем его сопряженным модулем к X.

Пару (X, X') E-модулей X и X' назовем дуальной парой, если существует E-билинейная форма $\langle x, x' \rangle$ на $X \oplus X'$, удовлетворяющая следующим условиям: 1) для каждого $x \neq 0$ из X существует $x' \in X'$

такое, что $\langle x, x'\rangle \neq 0$; 2) для каждого $x' \neq 0$ из X' существует $x \in X$ такое, что $\langle x, x'\rangle \neq 0$.

Пусть (X, X') — дуальная пара. Всякую отделимую локально выпуклую топологию в X, дающую в качестве сопряженного модуля X', будем называть топологией, согласующейся с двойственностью между X и X'.

Имеет место следующее обобщение теоремы Макки — Аренса.

Теорема 4. *Для того чтобы отделимая локально выпуклая топология ξ была топологией, согласующейся с двойственностью между E-модулями X и X', необходимо и достаточно, чтобы $\sigma \leqslant \xi \leqslant \tau$, где*: 1) $\sigma = \prod\limits_q \sigma_q$ — *тихоновское произведение топологий* σ_q, $q \in \Delta$, $\sigma_q = \sigma(qX, qX')$ — *слабейшая топология в* qX, *согласующаяся с двойственностью между векторными пространствами* qX *и* qX'; 2) $\tau = \prod\limits_q \tau_q$ — *тихоновское произведение топологий* τ_q, $q \in \Delta$, $\tau_q = \tau(qX, qX')$ — *сильнейшая топология в* qX, *согласующаяся с двойственностью между* qX *и* qX' (*топология Макки*).

2. Пусть X — модуль над полуполем E, Δ — множество неприводимых идемпотентов E. Носителем модуля X назовем идемпотент

$$e(X) = \bigvee_{x \in X} e(x),$$

где $e(x)$ — носитель элемента $x \in X$.

Модуль X назовем заполненным, если для любых $x_q \in qX$, $q \in \Delta$, существует такой элемент $x \in X$, что $qx = x_q$.

Модуль X назовем конечномерным *, если для каждого $q \in \Delta$ qX конечномерно над полем R действительных чисел. Размерность qX над R обозначим $d_q(X)$. В случае

$$\max_{q \in \Delta} d_q(X) < \infty$$

положим

$$d(X) = \max_{q \in \Delta} d_q(X)$$

и $d(X) = \infty$ в противном случае. Модуль X назовем однородным, если $d(X) = d_q(X)$ для всех $q \leqslant e(X)$, $q \in \Delta$. Одонородный модуль X с носителем $e = e(X)$ и числом $d = d(X)$ будем обозначать $X(e, d)$.

Теорема 5. *Следующие три условия эквивалентны*:

1) X — *модуль конечного типа над* E;

2) X — *заполнен и* $d(X) < \infty$;

3) *существует конечное число однородных заполненных модулей* $X(e_i, d_i)$ *таких, что*

$$X = \prod_{i=1}^{n} X(e_i, d_i),$$

причем $e_i \wedge e_j = 0$ *при* $i \neq j$, $\bigvee\limits_{i=1}^{n} e_i = e(X)$ *и* $1 \leqslant d_1 < d_2 < \ldots$ $\ldots < d_n = d(X)$.

Систему $\{(e_i, d_i), i = 1, \ldots, n\}$ назовем размерностью ** модуля X конечного типа.

Теорема 6. *Следующие два условия эквивалентны*:

1) X — *конечномерный заполненный* E-*модуль и* $d(X) = \infty$;

---

* В ([2]) конечномерными названы модули конечного типа в терминологии Бурбаки ([4]).

** Другое определение размерности модуля конечного типа см. в ([2]).

2) *существует счетное число однородных заполненных модулей* $X(e_i, d_i)$ *таких, что* $X = \prod_{i=1}^{\infty} X(e_i, d_i)$, *причем* $e_i \wedge e_j = 0$ *при* $i \neq j$, $\bigvee_{i=1}^{\infty} e_i = e(X)$ *и* $1 \leqslant d_1 < d_2 < \ldots < d_n < \ldots$

Систему $\{(t_i, d_i), i = 1, \ldots, n, \ldots\}$ назовем размерностью конечномерного заполненного модуля.

Теорема 7. *Два конечномерных заполненных E-модуля E-изоморфны тогда и только тогда, когда их размерности совпадают.*

Теорема 8. *Всякий конечномерный E-модуль является E-модулем конечного типа тогда и только тогда, когда* Δ — *конечное множество.*

Теорема 9. *Отделимый конечномерный топологический E-модуль является полным тогда и только тогда, когда он заполнен.*

Отсюда и из теоремы 5 получаем следующие следствия.

Следствие 1. *Всякий отделимый E-модуль конечного типа является полным.*

Следствие 2. *Пусть* X — *отделимый топологический E-модуль,* $Y \subset X$ *и* Y *является E-модулем конечного типа. Тогда* Y *замкнут в* X.

Теорема 10. *Конечномерные отделимые полные топологические E-модули топологически E-изоморфны тогда и только тогда, когда их размерности совпадают.*

Теорема 11. *Для локальной компактности отделимого топологического E-модуля* X *необходимо и достаточно, чтобы* Δ *было конечным множеством и* X — *конечномерным.*

Теорема 12. *Для конечномерности нормированного над E E-модуля* X *необходимо и достаточно, чтобы всякое ограниченное множество в* X *было бикомпактным.*

Теорема 13 (задача наилучшего приближения). *Пусть* X — *нормированный над E E-модуль,* $L \subset X$ *и* L — *конечномерный полный E-модуль.*

Тогда для любого элемента $x \in X$ *существует элемент* $y_0 \in L$, *что*

$$\|x - y_0\| = \bigwedge_{y \in L} \|x - y\|.$$

Ташкентский государственный университет
им. В. И. Ленина

Поступило
25 V 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. Я. Антоновский, В. Г. Болтянский, Т. А. Сарымсаков, Топологические полуполя, Ташкент, 1960. [2] М. Я. Антоновский, В. Г. Болтянский, Т. А. Сарымсаков, Тр. Ташкентск. гос. унив., матем., в. 208 (1962). [3] И. М. Дектярев, Там же. [4] Н. Бурбаки, Алгебра. Модули, кольца формы М., 1966. [5] A. N. Kolmogorov, Studia Math., 5, 29 (1934).