Доклады Академии наук СССР
1971. Том 200, № 3

УДК 517.53 *МАТЕМАТИКА*

В. В. АСЕЕВ

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ МОДУЛЯ

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 26 III 1971)

В n-мерном эвклидовом пространстве R^n рассмотрим область D, на границе ∂D которой заданы два непересекающихся множества B_0 и B_1. Пусть Γ есть семейство всевозможных кривых, лежащих в области D и соединяющих B_0 с B_1. Следуя ([1]), определим модуль семейства Γ как величину

$$M(\Gamma) = \inf \int\limits_{R^n} [\rho(x)]^n dV, \tag{1}$$

где inf берется по всем допустимым для семейства Γ метрикам $\rho(x)$, т. е. по всем неотрицательным, измеримым в смысле Бореля, функциям $\rho(x)$ таким, что для любой спрямляемой кривой $\gamma \in \Gamma$ имеет место неравенство

$$\int\limits_\gamma \rho\, d\gamma \geqslant 1. \tag{2}$$

В общем случае требование спрямляемости кривой γ в определении допустимой метрики отсутствует и интеграл в условии (2) понимается как интеграл по одномерной мере Хаусдорфа. Однако мы используем то, что $M(\Gamma) = M(\Gamma')$, если Γ' есть некоторое подсемейство семейства Γ, отличающееся от него на исключительное семейство, т. е. на семейство кривых модуля нуль, а также то, что семейство всех неспрямляемых кривых является исключительным (см. ([1])).

Теорема. *Модуль семейства* Γ *не изменится, если* inf *в* (1) *брать только по непрерывным в* D *допустимым для* Γ *метрикам.*

Доказательство. Пусть $x \in D$. Обозначим через $r(x)$ расстояние от точки x до границы области D и рассмотрим функцию $r_\varepsilon(x) = \varepsilon r(x)$, $0 < \varepsilon < 1$. Функция $r_\varepsilon(x)$ непрерывна в области D и удовлетворяет в D условию Липшица с константой ε. Отсюда следует, что она почти всюду в D дифференцируема и в точках дифференцируемости имеет место оценка

$$|\operatorname{grad} r_\varepsilon(x)| \leqslant \varepsilon. \tag{3}$$

Рассмотрим теперь гомеоморфизм области D на себя, при котором точка $x \in D$ переходит в точку $z = x + r_\varepsilon(x) y \in D$, где $y \in R^n$, $\|y\| = 1$,— некоторый фиксированный вектор. Множество меры нуль переходит при этом отображении во множество меры нуль, и почти всюду в D существует якобиан этого отображения, для которого справедлива оценка

$$1 - \varepsilon \leqslant J(x) = 1 + (y, \operatorname{grad} r_\varepsilon(x)) \leqslant 1 + \varepsilon. \tag{4}$$

В случае, если $M(\Gamma) = \infty$, утверждение теоремы очевидно. Пусть $M(\Gamma) < \infty$. Тогда для произвольно заданного $0 < \varepsilon < 1$ найдется допустимая метрика $\rho(x)$ такая, что

$$\int\limits_{R^n} [\rho(x)]^n dV \leqslant (1 + \varepsilon) M(\Gamma). \tag{5}$$

Рассмотрим метрику

$$\tilde{\rho}(x)=\begin{cases}\dfrac{1+\varepsilon}{m(B_n)}\displaystyle\int_{B_n}\rho(x+r_\varepsilon(x)y)\,dV_y & \text{при } x\in D,\\ 0 & \text{при } x\,\overline{\in}\,D,\end{cases} \tag{6}$$

где B_n обозначает n-мерный шар единичного радиуса, а $m(B_n)$ есть его объем. Функция $\tilde{\rho}(x)$ непрерывна в области D и является допустимой метрикой для семейства Γ.

Действительно, пусть $\gamma\in\Gamma$ — некоторая спрямляемая кривая. Тогда ее образ γ^* при отображении $z(x)=x+r_\varepsilon(x)y$ тоже будет спрямляемой кривой из Γ, причем между элементами длин этих кривых имеет место соотношение $d\gamma^*\leqslant(1+\varepsilon)d\gamma$. Учитывая, что $\rho(x)$ допустима для Γ, имеем

$$\int_\gamma\tilde{\rho}(x)\,d\gamma=\frac{1+\varepsilon}{m(B_n)}\int_\gamma\left\{\int_{B_n}\rho(z(x))\,dV_y\right\}d\gamma=\frac{1+\varepsilon}{m(B_n)}\int_{B_n}\left\{\int_\gamma\rho(z(x))\,d\gamma\right\}dV_y\geqslant$$

$$\geqslant\frac{1+\varepsilon}{m(B_n)}\int_{B_n}\frac{1}{(1+\varepsilon)}\left\{\int_{\gamma^*}\rho\,d\gamma^*\right\}dV_y\geqslant 1.$$

Применяя теперь неравенство Гельдера, теорему Фубини и пользуясь отмеченными свойствами отображения $z(x)$, получим

$$\int_{R^n}[\tilde{\rho}(x)]^n\,dV_x=\int_D[\tilde{\rho}(x)]^n\,dV_x=\frac{(1+\varepsilon)^n}{[m(B_n)]^n}\int_D\left[\int_{B_n}\rho(z(x))\,dV_y\right]^n dV_x\leqslant$$

$$\leqslant\frac{(1+\varepsilon)^n}{[m(B_n)]^n}\int_D\left\{[m(B_n)]^{n-1}\int_{B_n}[\rho(z(x))]^n\,dV_y\right\}dV_x=$$

$$=\frac{(1+\varepsilon)^n}{[m(B_n)]}\int_{B_n}\left\{\int_D[\rho(z)]^n\frac{1}{J(x(z))}\,dV_x\right\}dV_y\leqslant\frac{(1+\varepsilon)^{n+1}}{1-\varepsilon}M(\Gamma).$$

Таким образом, по заданному $\varepsilon>0$ мы построили допустимую для Γ метрику, которая непрерывна в области D и для которой

$$\int_{R^n}[\rho(x)]^n\,dV\leqslant(1+O(\varepsilon))\,M(\Gamma).$$

Теорема тем самым доказана.

Используя полученный результат и повторяя аналогичные рассуждения в ([2]), получаем

Следствие. *Если $C(D;B_0,B_1)$ есть конформная емкость области D относительно $B_0\subset\partial D$ и $B_1\subset\partial D$, то*

$$M(\Gamma)=C(D;B_0,B_1).$$

Автор выражает благодарность А. В. Сычеву за помощь.

Новосибирский государственный университет

Поступило 20 XII 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] B. Fuglede, Acta Math., 98, 171 (1957). [2] А. В. Сычев, Сибирск. матем. журн., 6, № 5, 1108 (1963).