Доклады Академии наук СССР
1971. Том 200, № 6

УДК 517.522.3+517.512.5 МАТЕМАТИКА

Л. Д. ГОГОЛАДЗЕ

О (H,k)-СУММИРУЕМОСТИ КРАТНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ ФУРЬЕ

(Представлено академиком И. Н. Векуа 9 IV 1971)

Рассмотрим 2π-периодическую относительно каждой из переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ суммируемую на R_0 функцию $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, где $R_0 = [-\pi, \pi; -\pi, \pi; \ldots; -\pi, \pi)$ есть n-мерный куб.

Пусть

$$G(f) = \sum_{m_1, m_2, \ldots, m_n=-\infty}^{\infty} c_{m_1, m_2, \ldots, m_n} e^{i(m_1x_1+m_2x_2+\ldots+m_nx_n)} \tag{1}$$

ряд Фурье функции $f(x_1, \ldots, x_n)$. Ряд

$$\overline{G}(f, x_{j_1}) \equiv \sum_{m_1, \ldots, m_n=-\infty}^{\infty} [-i \operatorname{sign} m_{j_1}] c_{m_1, \ldots, m_n} e^{i(m_1x_1+\ldots+m_nx_n)} \quad (j_1 = 1, 2, \ldots, n) \tag{2}$$

называется сопряженным рядом по переменной x_{j_1} ряда $G(f)$. Символами $\overline{G}(f, x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_\nu})$ обозначаются сопряженные ряды ряда $G(f)$ по совокупности переменных $x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_\nu}$ ($\nu = 1, 2, \ldots, n$; $j_\nu = 1, 2, \ldots, n$; $j_p \neq j_q$, если $p \neq q$), которые получаются последовательным применением операции сопряжения и имеют вид

$$\overline{G}(f, x_{j_1}, \ldots, x_{j_\nu}) \equiv$$

$$\equiv \sum_{m_1, \ldots, m_n=-\infty}^{\infty} (-i)^\nu \operatorname{sign}(m_{j_1} \ldots m_{j_\nu}) c_{m_1, \ldots, m_n} \times e^{i(m_1x_1+\ldots+m_nx_n)}. \tag{3}$$

Через $S_{\mu_1, \ldots, \mu_n}(f, x_1, \ldots, x_n)$ и $\overline{S}_{\mu_1, \ldots, \mu_n}^{(x_{j_1}, \ldots, x_{j_\nu})}(f, x_1, \ldots, x_n)$ обозначаются симметрические частичные суммы соответственно рядов $G(f)$ и $\overline{G}(f, x_{j_1}, \ldots, x_{j_\nu})$, а символами $\sigma_{\mu_1, \ldots, \mu_n}(\alpha, f, x_1, \ldots, x_n)$ и $\overline{\sigma}_{\mu_1, \ldots, \mu_n}^{(x_{j_1}, \ldots, x_{j_\nu})}(\alpha, f, x_1, \ldots, x_n)$ — их чезаровские средние порядка $\alpha > -1$, которые определяются следующим образом:

$$\sigma_{\mu_1, \ldots, \mu_n}(\alpha, f, x_1, \ldots, x_n) =$$

$$= \frac{1}{\prod_{k=1}^{n} A_{\mu_k}^{(\alpha)}} \sum_{m_1=0}^{\mu_1} \ldots \sum_{m_n=0}^{\mu_n} S_{m_1, \ldots, m_n}(f, x_1, \ldots, x_n) \prod_{k=1}^{n} A_{\mu_k - m_k}^{(\alpha-1)}; \tag{4}$$

$$\overline{\sigma}^{(x_{j_1},\ldots,x_{j_\nu})}_{\mu_1,\ldots,\mu_n}(\alpha, f, x_1, \ldots, x_n) =$$

$$= \frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{n} A^{(\alpha)}_{\mu_k}} \sum_{m_1=0}^{\mu_1} \cdots \sum_{m_n=0}^{\mu_n} \overline{S}^{(x_{j_1},\ldots,x_{j_\nu})}_{m_1,\ldots,m_n}(f, x_1, \ldots, x_n) \prod_{k=1}^{n} A^{(\alpha-1)}_{\mu_k-m_k}, \tag{5}$$

где $A^{(\alpha)}_k = (\alpha+1)\ldots(\alpha+k)/k!$

Говорят, что ряд (1) (H, k)-суммируем, $k > 0$, в точке $(x_1^0, \ldots, x_n^0) \in R_0$ к значению $f(x_1^0, \ldots, x_n^0)$, если

$$\lim_{\mu_1,\ldots,\mu_n\to\infty} \frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{n} A^{(1)}_{\mu_k}} \sum_{m_1=0}^{\mu_1} \cdots \sum_{m_n=0}^{\mu_n} |S_{m_1,\ldots,m_n}(f, x_1^0, \ldots, x_n^0) - f(x_1^0, \ldots, x_n^0)|^k = 0. \tag{6}$$

Аналогично определяется (H, k)-суммируемость сопряженных рядов.

Справедлива

Теорема 1. *Пусть $f(x_1, \ldots, x_n) \in L(\ln^+ L)^{n-1}$, $n \geqslant 1$. Тогда для любого $k > 0$*

$$\int_{R_0} \sup_{\mu_1,\ldots,\mu_n} \left[\frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{n} A^{(1)}_{\mu_k}} \sum_{m_1=0}^{\mu_1} \cdots \sum_{m_n=0}^{\mu_n} |S_{m_1,\ldots,m_n}(f, x_1, \ldots, x_n)|^k\right]^{\theta/k} dx_1 \ldots dx_n \leqslant$$

$$\leqslant B(\theta, k, n)\left[\int_{R_0} |f(x_1, \ldots, x_n)|(\ln^+|f(x_1, \ldots, x_n)|)^{n-1} dx_1 \ldots dx_n\right]^\theta +$$

$$+ B(\theta, k, n); \tag{7}$$

$$\int_{R_0} \sup_{\mu_1,\ldots,\mu_n} \left[\frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{n} A^{(1)}_{\mu_k}} \sum_{m_1=0}^{\mu_1} \cdots \sum_{m_n=0}^{\mu_n} |\overline{S}^{(x_{j_1},\ldots,x_{j_\nu})}_{m_1,\ldots,m_n}(f, x_1, \ldots, x_n)|^k\right]^{\theta/k} dx_1 \ldots dx_n \leqslant$$

$$\leqslant B(\theta, k, n)\left[\int_{R_0} |f(x_1, \ldots, x_n)|(\ln^+|f(x_1, \ldots, x_n)|)^{n-1} dx_1 \ldots dx_n\right]^\theta +$$

$$+ B(\theta, k, n), \tag{8}$$

где $0 < \theta < 1$, а $B(\theta, k, n)$ — положительная константа, зависящая лишь от θ, k и n.

Заметим, что при $n = 1$ в правых частях неравенств (7) и (8) второе слагаемое можно опустить.

Утверждение (7) теоремы 1 в случае, когда $f(x_1, \ldots, x_n) \in L(\ln^+ L)^{n+1}$, было получено Марцинкевичем [1].

Насколько нам известно, соотношения (7) и (8) для случая $n = 1$ являются новыми.

Следствие 1. *Если $f(x_1, \ldots, x_n) \in L(\ln^+ L)^{n-1}$, то ряд Фурье функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ и все сопряженные тригонометрические ряды (H, k)-суммируемы почти всюду на R_0 для любого $k > 0$.*

Заметим, что следствие 1 для тригонометрических рядов Фурье при $n = 2$ и $k = 2$ содержится в статье [2] (см. теорему 2), однако лемма 4, на которую опирается доказательство, не верна.

Следствие 1 не улучшаемо в следующем смысле: *пусть задана любая функция $\varphi(u)$, $u \geqslant 0$, положительная, возрастающая и имеющая порядок $o(u \ln^{n-1} u)$ при $u \to 0$.*

Тогда существует такая положительная функция $\psi(x_1, \ldots, x_n)$, что

$$\int_{R_0} \varphi[\psi(x_1, \ldots, x_n)]\, dx_1 \ldots dx_n < \infty;$$

однако ряд Фурье функции $\psi(x_1, \ldots, x_n)$ нигде не суммируется методом (H, k) для любого $k \geqslant 1$ (см. [3]).

Верна и

Теорема 2. *Пусть* $f(x_1, \ldots, x_n) \in L^p(\ln^+ L)^{n-1}$, $1 \leqslant p < 2$. *Тогда*

$$\int\limits_{R_0} \sup_{\mu_1,\ldots,\mu_n} \left[\frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{n} A_{\mu_k}^{(1)}} \sum_{m_1=0}^{\mu_1} \ldots \sum_{m_n=0}^{\mu_n} \left| \sigma_{m_1,\ldots,m_n} \left(\frac{1}{p} - 1, f, x_1, \ldots, x_n\right) \right|^k \right)^{\frac{\theta}{k}} dx_1 \ldots dx_n \leqslant$$

$$\leqslant B(\theta, k, n, p) \left[\int\limits_{R_0} |f(x_1, \ldots, x_n)|^p (\ln^+ |f(x_1, \ldots, x_n)|)^{n-1} dx_1 \ldots dx_n \right]^\theta +$$

$$+ B(\theta, k, n, p); \tag{9}$$

$$\int\limits_{R_0} \sup_{\mu_1,\ldots,\mu_n} \left[\frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{n} A_{\mu_k}^{(1)}} \sum_{m_1=0}^{\mu_1} \ldots \sum_{m_n=0}^{\mu_n} \left| \bar{\sigma}_{m_1,\ldots,m_n}^{(x_{j_1},\ldots,x_{j_\nu})} \left(\frac{1}{p} - 1, x_1, \ldots, x_n\right) \right|^k \right]^{\frac{\theta}{k}} dx_1 \ldots dx_n \leqslant$$

$$\leqslant B(\theta, k, n, p) \left[\int\limits_{R_0} |f(x_1, \ldots, x_n)|^p (\ln^+ |f(x_1, \ldots, x_n)|)^{n-1} dx_1 \ldots dx_n \right]^\theta +$$

$$+ B(\theta, k, n, p) \tag{10}$$

для любого $0 < k < p/(p-1)$, *где* $0 < \theta < 1$, *а* $B(\theta, k, n, p)$ — *положительная константа, зависящая лишь от* θ, k, n *и* p.

Следствие 2. *Если выполнены условия теоремы* 2, *то для любого* $0 < k < p/(p-1)$ *почти для всех* $(x_1, \ldots, x_n) \in R_0$

$$\lim_{\mu_1,\ldots,\mu_n \to 0} \frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{n} A_{\mu_k}^{(1)}} \sum_{m_1=0}^{\mu_1} \ldots \sum_{m_n=0}^{\mu_n} |\sigma_{m_1,\ldots,m_n}(1/p - 1, f, x_1, \ldots, x_n) -$$

$$- f(x_1, \ldots, x_n)|^k = 0,$$

$$\lim_{\mu_1,\ldots,\mu_n \to 0} \frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{n} A_{\mu_k}^{(1)}} \sum_{m_1=0}^{\mu_1} \ldots \sum_{m_n=0}^{\mu_n} |\bar{\sigma}_{m_1,\ldots,m_n}^{(x_{j_1},\ldots,x_{j_\nu})}(1/p - 1, f, x_1, \ldots, x_n) -$$

$$- \bar{f}^{(x_{j_1},\ldots,x_{j_\nu})}(x_1, \ldots, x_n)|^k = 0$$

$$(\nu = 1, 2, \ldots, n, \quad j_\nu = 1, 2, \ldots, n), \tag{12}$$

где $\bar{f}^{(x_{j_1},\ldots,x_{j_\nu})}(x_1, \ldots, x_n)$ — *сопряженные функции* (*см.* ([4]), *стр.* 257) *для* $f(x_1, \ldots, x_n)$.

Следствие 2, когда $n = 1$, было получено в ([5]) при $p = 1$, а при $p \in [1,2)$ в ([6]).

Научно-исследовательский институт
прикладной математики
Тбилисского государственного университета

Поступило
31 III 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] J. Marcinkiewicz, Collected Papers, Warszawa, 1964. [2] О. Д. Габисония, Тр. Сухумск. пед. инст., 20, 231 (1969). [3] А. Зигмунд, Тригонометрические ряды, 2, М., 1965. [4] Л. В. Жижиашвили, Сопряженные функции и тригонометрические ряды, 1969. [5] A. Zygmund, Proc. Lond. Math. Soc., 47, 326 (1941). [6] G. Sunouchi, Tohoku Math. J., 6, 220 (1954).