Доклады Академии наук СССР
1971. Том 200, № 6

УДК 513.61 *МАТЕМАТИКА*

Д. А. ГУДКОВ

ПОСТРОЕНИЕ НОВОЙ СЕРИИ M-КРИВЫХ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 12 IV 1971)

1. А. Гарнак ([1]) доказал, что неособая действительная кривая C_m, m-го порядка, в действительной проективной плоскости $(x) = (x_0 : x_1 : x_2)$ имеет не более чем $(m-1)(m-2)/2+1$ полных действительных ветвей. В той же работе дан способ построения неособых кривых C_m с наибольшим числом действительных ветвей (M-кривых). Этот способ назовем способом Гарнака, а получающуюся серию M-кривых — серией Гарнака. Д. Гильберт ([2]) дал другой способ построения M-кривых (способ Гильберта, серия Гильберта). А. Брюзотти ([4], [5]) подметил то общее, что имелось в способах Гарнака и Гильберта и дал ряд новых способов построения M-кривых (способы Брюзотти, серии Брюзотти). Некоторые уточнения прежних методов дали Г. Биггиогеро ([6], [7]) и А. Виман ([8]). Все эти методы находят из известных расположений прямой линии относительно прямой, кривой второго порядка, кривой третьего порядка и четвертого порядка, а также двух кривых второго порядка и дальнейшего многократного применения метода «малого параметра».

2. Вопрос о топологической классификации неособых кривых до 5-го порядка включительно решается просто методом Гарнака. Отметим, что дают перечисленные выше методы для кривых 6-го порядка. M-кривая шестого порядка C_6 состоит из 11 овалов. Если такая кривая состоит из овала α, внутри которого лежат k овалов один вне другого и еще l овалов, лежащих вместе с овалом α один вне другого, то будем говорить, что кривая C_6 имеет тип $\frac{k}{1}l$. Если же кривая C_6 состоит из 11 овалов один вне другого, то обозначим ее тип через 11. Легко видеть, что логически возможны 11 типов M-кривых шестого порядка:

$$\frac{10}{1};\ \frac{9}{1}1;\ \frac{8}{1}2;\ \frac{7}{1}3;\ \frac{6}{1}4;\ \frac{5}{1}5;\ \frac{4}{1}6;\ \frac{3}{1}7;\ \frac{2}{1}8;\ \frac{1}{1}9;\ 11.$$

Из этих кривых способом Гарнака строится лишь кривая типа $\frac{1}{1}9$, а способом Д. Гильберта кривые $\frac{9}{1}1$ и $\frac{1}{1}9$. Способы Л. Брюзотти, Г. Беггиогера и А. Вимана не дают для кривых шестого порядка ничего нового. Д. Гильберт ([3]) в 16-й проблеме высказал предположение, что из M-кривых C_6 существуют лишь кривые типов $\frac{9}{1}1$ и $\frac{1}{1}9$. Отметим, что И. Г. Петровский ([9]) доказал одну общую теорему, из которой следует, что кривая C_6 типа 11 не существует. Нами доказано ([10]), что кривая C_6 не может иметь типов $\frac{10}{1}$; $\frac{8}{1}2$; $\frac{7}{1}3$; $\frac{6}{1}4$; $\frac{4}{1}6$; $\frac{3}{1}7$; $\frac{2}{1}8$.

3. В настоящей заметке мы построим новую серию M-кривых, в которой содержится кривая C_6 типа $\frac{5}{1}5$ *.

Теорема 1. *Существует распадающаяся кривая 6-го порядка $C_1 \cdot C_5$, где кривая C_5 состоит из нечетной ветви π и шести овалов; прямая C_1 пересекается с ветвью π в 5 последовательных точках, образуя пять ова-*

* Идея другого (очень сложного) доказательства существования кривой C_6 типа $\frac{5}{1}5$ приведена нами в ([10], [11]).

лоидов, в одном из которых лежат пять овалов кривой C_5; один овал кривой C_5 лежит вне указанных овалоидов (см. рис. 3в).

Доказательство. 1) Возьмем действительную неособую кривую второго порядка C_2, состоящую в действительной проективной плоскости (x) из одного овала (рис. 1*а*). В двух действительных точках p_1 и p_2 кривой C_2 проведем к этой кривой касательные прямые L_1 и L_2. Очевидно, что через точки p_1 и p_2 можно провести такую действительную неособую кривую второго порядка $\tilde{C}_2$, что точка пересечения прямых L_1 и L_2 будет лежать внутри кривой $\tilde{C}_2$ и кривые C_2 и $\tilde{C}_2$ будут пересекаться в четырех

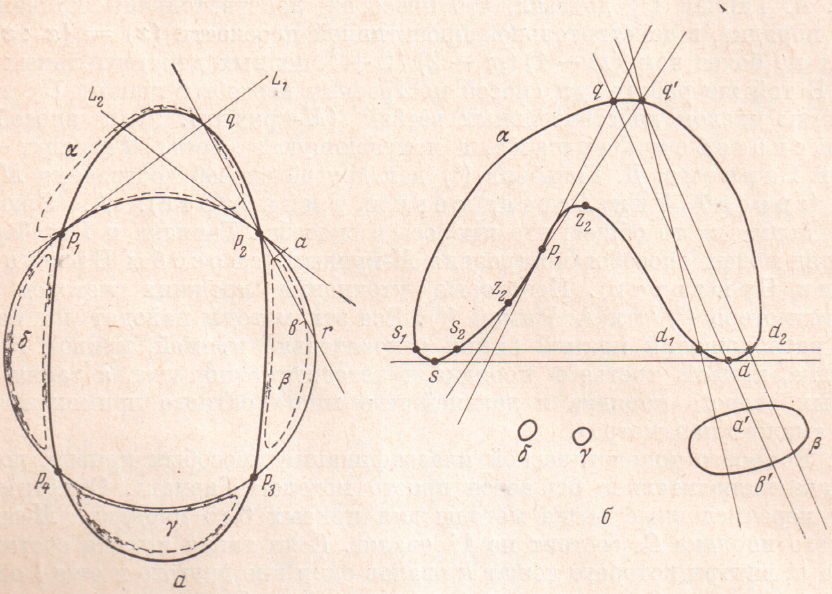

Рис. 1

действительных точках p_1, p_2, p_3, p_4, расположенных на кривых C_2 и $\tilde{C}_2$ в одинаковом порядке (рис. 1*а*). Обозначим вторую точку пересечения прямой L_1 с кривой $\tilde{C}_2$ через q. Тогда прямая qp_2 пересечет кривую C_2 в точках p_2 и r (на дуге p_2p_3, рис. 1*а*). Пусть $l = 0$ — уравнение действительной прямой, не имеющей общих действительных точек с кривыми C_2 и $\tilde{C}_2$. Рассмотрим пучок кривых четвертого порядка

$$C_4(t) \equiv C_2\tilde{C}_2 + tL_1 \cdot l^3 = 0. \qquad (1)$$

Нетрудно видеть, что при достаточно малом $|t| > 0$ и подходящем знаке t кривая $C_4(t)$ имеет четыре овала α, β, γ, δ, изображенных на рис. 1*а* штрихами. При этом овал α имеет в точке p_1 прямую L_1 касательной перегиба и пересекает еще прямую L_1 в точке q; прямая qp_2 пересекает овал β в двух точках a и b, близких к точкам p_2 и r соответственно. Овал α имеет двойную касательную sd (см. рис. 1*б*), причем точка s близка к точке p_1, а точка d — к точке p_2. Поэтому прямая qd близка к прямой qp_2 и пересекает овал β в двух точках a' и b'. На рис. 1*б* показано взаимное расположение прямых qp_1, qd, sd и овалов α, β, γ, δ.

2) Провернем прямую $L_1 \equiv qp_1$ около точки p_1 так, чтобы получить прямую p_1q', пересекающую овал α в точках z_1, p_1, z_2 в окрестности точки p_1 и в точке q' в окрестности точки q. Пусть поворот прямой p_1q в положение p_1q' настолько мал, что точки z_1, z_2 лежат на дуге sp_1d овала α и прямая $q'd$ продолжает пересекать овал β в двух точках.

3) Наконец, сдвинем двойную касательную sd в такую прямую s_1d_1, чтобы она пересекала овал α в двух точках s_1, s_2 в окрестности точки s и в двух точках d_1 и d_2 в окрестности точки d. Этот сдвиг, очевидно, можно предполагать настолько малым, чтобы дуга s_1ss_2 (овала α) не

включала точку z_1, дуга d_1dd_2 — точку z_2 и прямые $q'd_1$ и $q'd_2$ пересекали каждая овал β в двух точках. При указанных перемещениях прямых p_1q и sd, как эти прямые, так и прямые $q'd_1$ и $q'd_2$ постоянно пересекают кривую C_4 в четырех действительных точках на овалах α и β и поэтому не пересекают овалов γ и δ.

4) Возьмем фигуру, состоящую из кривой C_4, прямой $p_1q' \equiv L$ и прямых $q'd_1$, $q'd_2$, d_1d_2. Выберем фундаментальные точки проективной системы координат в точках $q' \equiv y_0$; $d_1 \equiv y_1$; $d_2 \equiv y_2$ и обозначим координатные прямые $y_jy_l \equiv x_i$ (где i, j, $l = 0, 1, 2$ и попарно различны). На рис. 2*а* взята плоскость $(x_0 : x_1 : x_2) = (x)$ в виде круга с отождествленными диаметрально противоположными точками граничной окружности (проективный круг). Обозначим области плоскости (x), на которые ее делят прямые x_i, через I—IV; отрезки прямой L, на которые ее делят прямые x_i, и овал α — через a, b, c, d, e; дуги овала α, на которые его делят прямые x_i и L, через 1—8; дуги овала β, на которые его делят прямые x_1 и x_2, через 9—12. Произведем квадратичное преобразование плоскости (x) на плоскость (y):

$$x_0 = y_1 \cdot y_2; \quad x_1 = y_0 \cdot y_2; \quad x_2 = y_0 \cdot y_1. \tag{2}$$

Области I—IV плоскости (x) диффеоморфно отображаются в плоскость (y) на области, на которые плоскость (y) делится прямыми y_0, y_1, y_2. Обозначим области, соответствующие в плоскости (y) областям I—IV, теми же цифрами. Прямые x_i переходят в точки x_i, а точки y_j в прямые y_j плоскости (y). По теореме 7.2, гл. III ([12]), прямая L преобразуется в кривую порядка $1 \cdot 2 - 1 = 1$, т. е. в прямую $\tilde{L}$, проходящую через точку x_0. Поэтому отрезки a — e прямой L преобразуются в отрезки прямой $\tilde{L}$, эти отрезки обозначим соответственно теми же буквами a — e. Кривая C_4 преобразуется, по той же теореме 7.2, гл. III, ([12]), в кривую порядка $2 \cdot 4 - (1 + 1 + 1) = 5$, т. е. в кривую пятого порядка $\tilde{C}_5$. При этом овал α кривой C_4 перейдет в нечетную ветвь кривой $\tilde{C}_5$, состоящую из дуг 1—8, соответствующих дугам 1—8 овала α (см. рис. 2*б*). Дуга 4 овала α перейдет в петлю 4, расположенную между прямыми y_2 и $\tilde{L}$ с узлом в x_0. Овал β перейдет в двойную восьмерку с петлями 9 и 11 и узлами в точках x_1 и x_2. Наконец, овалы γ и δ перейдут в овалы (обозначенные теми же буквами γ и δ), лежащие в части области III, ограниченной дугами 11, 2 и отрезком a. Итак, доказано существование кривой $\tilde{L} \cdot \tilde{C}_5$ (рис. 2*б*). Эта же кривая $\tilde{L} \cdot \tilde{C}_5$ изображена отдельно на рис. 3*а*.

5) Возьмем кривую $\tilde{L} \cdot \tilde{C}_5$ рис. 3*а* и сдвинем прямую $\tilde{L}$ в такую прямую C_1, которая не проходит через точку x_0 и не пересекает петлю кривой $\tilde{C}_5$. При таком достаточно малом сдвиге, очевидно, получим кривую $C_1 \cdot \tilde{C}_5$ (рис. 3*б*). Легко видеть, что разрешая узлы x_0, x_1, x_2 кривой $\tilde{C}_5$, можно получить кривую $C_1 \cdot C_5$ (рис. 3*в*).

Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Существует кривая C_6 типа* $\frac{5}{1}$ 5.

Доказательство. Нетрудно видеть, что разрешая узлы кривой $C_1 \cdot C_5$ (рис. 3*в*), можно получить кривую C_6 типа $\frac{5}{1}$ 5.

Теорема 3. *Из кривой $C_1 \cdot C_5$ (рис. 3в) строится серия М-кривых, содержащая, в частности, следующие кривые:*

1°. *Для каждого нечетного $m \geqslant 7$ кривую C_m, состоящую из нечетной ветви; овала α, внутри которого имеется 5 овалов вне друг друга и $(m^2 - 3m) / 2 - 5$ овалов, лежащих вместе с овалом α вне друг друга.*

2°. *Для каждого четного $m \geqslant 6$ кривую C_m, состоящую из овалов α, β и еще $(3m^2 - 6m) / 8 - 4$, лежащих вне друг друга; пяти овалов, лежащих в овале α и вне друг друга, и $m(m - 6) / 8$ овалов, лежащих внутри овала β и вне друг друга.*

Доказательство легко получается применением построения Гарнака ([1]).

Отметим, что кривая $C_1 \cdot C_5$ (рис. 3в) не может быть получена из распадающихся кривых меньшего порядка методом малого параметра. Это позволяет предполагать, что даже зная все возможные взаимные расположения кривых C_k и C_n для всех $k \leqslant n_0$ и $n \leqslant n_0$, где n_0 фиксировано, невозможно получить многократным применением метода малого параметра все существующие M-кривые.

Замечание. Пусть C_m — неособая кривая порядка m. Овал кривой C_m назовем четным (нечетным), если он лежит внутри четного (нечетно-

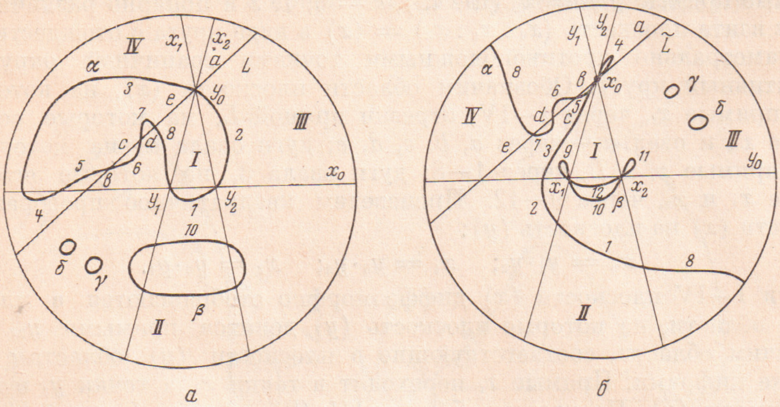

Рис. 2

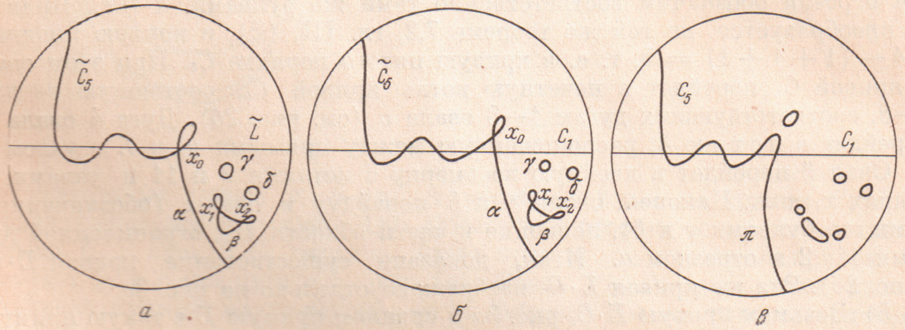

Рис. 3

го) числа овалов кривой C_m. Самые внешние овалы считаем четными. Обозначим число четных овалов кривой C_m через p, а нечетных — через q.

Рассмотрение многих примеров показало, что имеет место

Предложение (о периодичности в расположении овалов M-кривых). *Пусть C_m — неособая M-кривая четного порядка m.*

Тогда должно выполняться сравнение $p - q \equiv (m/2)^2 (\mathrm{mod}\, m)$.

Доказательства мы не имеем, т. е. указанное утверждение — гипотеза.

Горьковский государственный университет им. Н. И. Лобачевского

Поступило 5 IV 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] A. Harnack, Math. Ann., **40**, 189 (1876). [2] D. Hilbert, Math. Ann., **38**, 115 (1891). [3] D. Hilbert, Arch. Math. u. Phys., 3 Reihl, **1**, 44 (1901). [4] L. Brusotti, Lomb. Ist. Rend. (2), **47**, 489, 797 (1914); **48**, 182 (1915); **49**, 495, 577, 905 (1916). [5] I. Brusotti, Rend. Circolo mat. Palermo, **42**, 138 (1917). [6] G. Biggiogero, Lomb. Ist. Rend. (2), **55**, 499 (1922). [7] G. Biggiogero, Lomb. Ist. Rend. (2), **56**, 841 (1923). [8] A. Wiman, Math. Ann., **90**, 222 (1923). [9] J. Petrowsky, Ann. Math., **39**, № 1, 187 (1938). [10] Д. А. Гудков, Уч. зап. Горьковск. гос. унив., в. 87, 118 (1969). [11] Д. А. Гудков, ДАН, **185**, № 2, 260 (1969). [12] Р. Уокер, Алгебраические кривые, М., 1952.