

В. М. БОРОК, Я. И. ЖИТОМИРСКИЙ

О ЗАДАЧЕ КОШИ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ С ЛИНЕЙНО ПРЕОБРАЗОВАННЫМ АРГУМЕНТОМ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 29 III 1971)

1. Известная теорема И. М. Гельфанда и Г. Е. Шилова ⁽¹⁾ описывает класс единственности решения задачи Коши для любой системы линейных уравнений в частных производных вида

$$\partial \bar{u}(x, t) / \partial t = P(D) \bar{u}(x, t), \quad x \in R^m, \quad t \in [0, T]; \quad (1)$$

$P(D)$ — матрица, элементами которой являются полиномы относительно $\partial / \partial x_1, \dots, \partial / \partial x_m$ с постоянными коэффициентами; он состоит из функций, удовлетворяющих при каком-либо $a > 0$ оценке

$$\|\bar{u}(x, t)\| \leq C \exp \{a \|x\|^{p_0}\}, \quad 1/p_0 + 1/p_0' = 1; \quad (2)$$

p_0 — приведенный порядок системы (1). Впоследствии более тонкие классы единственности решения той же задачи были получены Г. Н. Золотаревым ⁽²⁾ и Н. Н. Чаусом ⁽³⁾.

Если правая часть системы (1), кроме операторов дифференцирования, содержит операторы сдвига по пространственному аргументу x , то, как показали Л. И. Камынин ⁽⁴⁾ и др. и Б. Л. Гуревич ⁽⁵⁾, класс единственности решения задачи Коши сужается: в этом случае он состоит из функций, удовлетворяющих при некотором $a > 0$ оценке

$$\|\bar{u}(x, t)\| \leq C \exp \{a \|x\| \ln \|x\|\}. \quad (3)$$

Целью данной статьи является исследование, как влияет на классы единственности решения задачи Коши наличие в правой части уравнения вида (1) различных линейных преобразований пространственного аргумента x . При этом оказывается, что наличие лишь ортогональных преобразований (без сдвигов) не меняет класса единственности (2), а наличие ортогональных преобразований и сдвигов не меняет класса (3). Если же пространственный аргумент x подвергается неортогональному преобразованию, то, при некоторых дополнительных предположениях об этом преобразовании, происходит дальнейшее сужение класса единственности. В зависимости от вида (1) он состоит из функций, удовлетворяющих при больших значениях $\|x\|$ и некотором $a > 0$ (соответственно $b > 0$), либо оценке $|u(x, t)| \leq C \exp \{a \ln^2 \|x\|\}$, либо оценке $|u(x, t)| \leq C \exp \{b \ln \|x\| \ln \ln \|x\|\}$. Существенное расширение этих классов невозможно, как показывают приведенные в п. 3 примеры.

2. Рассмотрим следующую задачу Коши:

$$\partial u(x, t) / \partial t = \sum_{r=1}^R L_r P_r(D) u(x, t) \equiv Lu(x, t); \quad (4)$$

$$u(x, 0) = 0. \quad (5)$$

Здесь $x = (x_1, \dots, x_m) \in R^m$; $t \in [0, T]$; $P_r(D) = \sum_{|k| \leq p} A_{r(k)} D^{(k)}$; $(k) = (k_1, \dots, k_m)$ — мультииндекс, $|k| = k_1 + \dots + k_m$; $D^{(k)} = D_1^{k_1} \dots D_m^{k_m}$;

$D_i = \partial / \partial x_i$; $A_{r(n)}$ — (комплексные) постоянные; операторы L_r действуют следующим образом:

$$L_r g(x) = g(\Lambda_r x + \mu_r), \quad (6)$$

где Λ_r — неособая матрица $(m \times m)$, $\mu_r \in R^m$.

Вопрос о классе единственности решения задачи Коши для уравнения (4) — это вопрос о том, какова должна быть функция $f(r) \geq 0$, чтобы всякое решение $u(x, t)$ задачи (4), (5), удовлетворяющее оценке

$$|u(x, t)| \leq C \exp \{f(\|x\|)\}, \quad x \in R^m, \quad t \in [0, T], \quad (7)$$

тождественно равнялось нулю.

Теорема 1. Пусть в (6) $\mu_r = 0$, Λ_r — ортогональная матрица ($r = 1, \dots, R$).

Тогда задача (4), (5) имеет лишь тривиальное решение в классе функций (7), если $f(r) = r^p l(r)$, $1/p + 1/p' = 1$, $l(r)$ — медленно растущая функция* такая, что

$$\int_0^\infty r^{-1} [l(r)]^{1-p} dr = \infty.$$

Теорема 2. Пусть в (6) Λ_r — ортогональные матрицы ($r = 1, \dots, R$) и $\mu = \max_{1 \leq r \leq R} \|\mu_r\|$ **.

Тогда задача (4), (5) имеет лишь тривиальное решение в классе функций (7), если $f(r) = ar \ln(r+1)$, $a < 1/\mu$.

Отметим, что в случае, когда уравнение (4) имеет вид (1), т. е. $R = 1$, $\Lambda_1 = E$ (единичная матрица), результат теоремы 1 был получен в (3). Если же $\Lambda_r = E$, $r = 1, \dots, R$, то результат теоремы 2 совпадает с результатами, полученными в (5) (см. также (7)).

Теорема 3. Пусть выполнены следующие условия:

1) матрицы Λ_r , $r = 1, \dots, R_1$, $R_1 \leq R$, таковы, что

$$\lambda = \max_{1 \leq r \leq R_1} \|\Lambda_r^{-1}\| < 1,$$

где под нормой матрицы понимается ее операторная норма в евклидовом пространстве;

2) матрицы Λ_r , $r = R_1 + 1, \dots, R$, являются ортогональными;

3) полиномы $P_r(D)$ в (4) имеют вид

$$P_r(D) = \sum_{\substack{(k) \\ k_0 \leq |k| \leq p}} A_{r(k)} D^{(k)}, \quad r = 1, \dots, R,$$

причем $k_0 > 0$.

Тогда задача (4), (5) имеет лишь тривиальное решение в классе функций (7), если $f(r) = a \ln^2(r+1)$ при $a < k_0 |\ln \lambda| / (2 \ln^2 \Lambda)$, где $\Lambda = \max_{1 \leq r \leq R_1} \|\Lambda_r\|$.

Теорема 4. Пусть матрицы Λ_r , $r = 1, \dots, R$, удовлетворяют условию $\|\Lambda_r^{-1}\| \leq 1$ и пусть $\Lambda = \max_{1 \leq r \leq R} \|\Lambda_r\|$.

Тогда задача (4), (5) имеет лишь тривиальное решение в классе функций (7), если

$$f(r) = \begin{cases} a \ln r \ln \ln r, & r > e, \\ 0, & r \leq e, \end{cases}$$

при $a < 1/\ln \Lambda$.

* См. (6), стр. 48; при $p = 2$ от $l(r)$ дополнительно требуется, чтобы функция $r^2 l(r)$ была сильным уточненным порядком; см. там же, стр. 59–60.

** Здесь и в дальнейшем $\|\cdot\|$ — евклидова длина вектора.

Доказательства теорем 1—4 могут быть проведены операторным методом на основе принципа Гольмгрена (⁽⁷⁾, гл. 2, §§ 2, 3) или по схеме, предложенной в (³), и основаны на оценках степеней оператора L^* , имеющего вид

$$L^* \varphi(x) = \sum_{r=1}^R P_r^*(D) L_r^* \varphi(x),$$

где $L_r^* \varphi(x) = \varphi(\Lambda_r^{-1}(x) - \mu_r)$, $P_r^*(D)$ — формально сопряженное к $P_r(D)$ дифференциальное выражение.

3. Приведем примеры, показывающие, что результаты теорем 1—4, вообще говоря, не могут быть существенно усилены.

Рассмотрим уравнение

$$\begin{aligned} \partial u(x, t) / \partial t &= a \partial u(x, t) / \partial x + b \partial u(ax, t) / \partial x, \\ -\infty < x < \infty, \quad 0 \leq t \leq T; \end{aligned} \quad (8)$$

a и $b \neq 0$ — произвольные комплексные числа, $|a| > 1$.

Для уравнения (8) выполнены условия теоремы 3: $\Lambda_1 = a$, $\Lambda_2 = 1$, $\lambda = |a|^{-1} < 1$, $k_0 = 1$, $\Lambda = |a|$. Согласно теореме 3, задача Коши для уравнения (8) имеет единственное решение в классе функций, удовлетворяющих оценке

$$|u(x, t)| \leq C \exp \{c \ln^2(1 + |x|)\}, \quad (9)$$

если $c < 1 / (2 \ln |a|)$.

Покажем, что в классе функций (9) при $c = c_0 > 1 / (2 \ln |a|)$ задача (8), (6) имеет решение $u(x, t) \neq 0$. Действительно, таким решением является функция

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{C^{(k)}(t) x}{\left(k! \prod_{j=0}^{k-1} (a + b a^j) \right)} \right], \quad (10)$$

если $C^{(k)}(0) = 0$, $k = 0, 1, \dots$

Пусть $C(t) \neq 0$ удовлетворяет условию (10) и $|C^{(k)}(t)| \leq k^{\lambda \gamma}$, $\gamma > 1$, $0 \leq t \leq T$. Поскольку при некоторых $B > 0$ и $\beta > 0$

$$\left| \prod_{j=0}^{k-1} (a + b a^j) \right| \geq B \beta^k |a|^{1/2 k},$$

то

$$|u(x, t)| \leq \frac{1}{B} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^{\lambda \gamma} |x|^k}{k! \beta^k |a|^{1/2 k}}. \quad (11)$$

Из неравенства $|x|^k \leq \exp \{k \ln(|x| + 1)\} \leq \exp \{1/2 (k^2 / (2c_0) + 2c_0 \ln^2(|x| + 1))\}$ и из (11) получаем

$$|u(x, t)| \leq \frac{1}{B} \exp \{c_0 \ln^2(1 + |x|)\} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^{\lambda \gamma} \exp \left\{ \frac{k^2}{4c_0} - \frac{k^2}{2} \ln |a| \right\}}{k! \beta^k}.$$

Ряд в правой части сходится, так как $\ln |a| > 1 / (2c_0)$.

Рассмотрим теперь уравнение

$$\partial u(x, t) / \partial t = u(ax, t), \quad a > 1, \quad -\infty < x < \infty, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (12)$$

Пусть функция $u_0(x, t) \neq 0$ определена при $t \in [0, T]$, $x \in [1, a]$, бесконечно дифференцируема по t , непрерывна по x и такая, что

$$u_0(a, t) \equiv \partial u_0(1, t) / \partial t, \quad \partial^k u_0(x, 0) / \partial t^k \equiv 0, \quad k = 0, 1, \dots$$

Всем этим условиям удовлетворяет, например, функция $u_0(x, t) = (x - a)(x - 1)C(t)$, где $C(t) \neq 0$, $C^{(k)}(0) = 0$, $k = 0, 1, \dots$

Тогда решением задачи (12), (5) является функция

$$u(x, t) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \int_0^t \frac{(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!} u_0(\alpha^n x, \tau) d\tau, & x \in \left[\frac{1}{\alpha^n}, \frac{1}{\alpha^{n-1}}\right), \\ \partial^n u_0\left(\frac{x}{\alpha^n}, t\right) / \partial t^n, & x \in [\alpha^n, \alpha^{n+1}), \end{cases} \quad (13)$$

$n = 0, 1, \dots$

Пусть $C = (1 + 2\varepsilon) / \ln \alpha$, $\varepsilon > 0$. Функцию $u_0(x, t)$ выберем так, чтобы $|\partial^k u_0(x, t) / \partial t^k| \leq k^{k(1+\varepsilon)}$, $k = 0, 1, \dots$, $t \in [0, T]$, $x \in [1, \alpha]$. Тогда из (13) получаем, что при $x \in [\alpha^k, \alpha^{k+1})$ $|u(x, t)| \leq k^{k(1+\varepsilon)}$.

Отсюда при $x \geq e$

$$|u(x, t)| \leq \exp \left\{ (1 + \varepsilon) \frac{\ln x}{\ln \alpha} \ln \frac{\ln x}{\ln \alpha} \right\} \leq C_1 \exp \{C \ln x \ln \ln x\}.$$

Этот пример показывает, что если в определении функции $f(r)$ в теореме 4 постоянную $a < 1 / \ln \Lambda$ заменить постоянной $c > 1 / \ln \Lambda$, то результат теоремы может оказаться неверным.

Отметим в заключение, что результаты теорем 1 и 2 также нельзя существенно улучшить, что хорошо известно для случая, когда все матрицы Λ_r ($r = 1, \dots, R$) являются единичными.

Харьковский государственный университет
им. А. М. Горького

Поступило
11 III 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов, УМН, 8, № 6, 3 (1953). ² Г. Н. Золотарев, Уч. зап. Ивановск. гос. пед. инст., 34, 34 (1963). ³ Н. Н. Чаус, Укр. матем. журн., 17, № 1, 126 (1965). ⁴ Л. И. Камынин, Изв. АН СССР, сер. матем., 17, 163 (1953). ⁵ Б. Л. Гуревич, ДАН, 108, 1001 (1956). ⁶ Б. Я. Левин, Распределение корней целых функций, М., 1956. ⁷ И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов, Обобщенные функции, в. 3. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений, М., 1958.