Доклады Академии наук СССР
1972. Том 202, № 3

УДК 517.512.2 МАТЕМАТИКА

Б. П. ОСИЛЕНКЕР

О СУММИРОВАНИИ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ ФУРЬЕ ФУНКЦИЙ КЛАССОВ $L^p_{\mu(x)}$ $(p \geqslant 1)$

(Представлено академиком В. И. Смирновым 21 VI 1971)

1. Обозначим через $\{p_n(x)\}$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$ ортонормированную на интервале (a, b) по мере $\mu(x)$ систему полиномов n-й степени. Если I — подынтервал из (a, b), то под $L^p_{\mu(x)}(I)$ $(p \geqslant 1)$ понимаем пространство функций, суммируемых на I в p-й степени, с нормой

$$\|f\|_p = \left\{\int_I |f(x)|^p \, d\mu(x)\right\}^{1/p} \quad (1 \leqslant p < \infty),$$

$$\|f\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in I} |f(x)| \quad (p = \infty).$$

Рассмотрим разложение Фурье функции $f(x) \in L^p_{\mu(x)}(I)$ $(p \geqslant 1) \cup \cup L^2_{\mu(x)}((a, b)/I)$:

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} c_k p_k(x), \quad c_k = \int_a^b f(x) p_k(x) \, d\mu(x) \quad (k = 0, 1, 2, \ldots) \tag{1}$$

при $x \in I c(a, b)$. В связи с результатами о расходимости разложений Фурье по ортогональным полиномам почти всюду и по метрике пространства $L^p_{\mu(x)}$ (см. ([2], [3], [5])) возникает задача о суммировании рядов (1). «Утверждение о суммируемости по общим ограниченным ортогональным полиномам неизвестно даже для метода Пуассона — Абеля» (([1]), стр. 289). Суммирование разложений по ультрасферическим полиномам методом Пуассона — Абеля исследовано в ([4]). Авторами работы ([4]) поставлена задача об изучении аналогичного вопроса для разложений по полиномам Якоби. Мы рассмотрим суммирование общих полиномиальных разложений Фурье функций классов $L^p_{\mu(x)}$ $(p \geqslant 1)$ с помощью $(C, 1)$-средних

$$\sigma_n(f, x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{k} c_l p_l(x) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

почти всюду или по метрике соответствующего пространства.

2. Как хорошо известно (([1]), стр. 33), система ортонормированных полиномов $\{p_n(x)\}$ удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$\begin{gathered} x p_n(x) = a_n p_{n+1}(x) + b_n p_n(x) + a_{n-1} p_{n-1}(x) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots), \\ p_{-1}(x) \equiv 0, \quad a_{-1} = 0, \quad p_0(x) \equiv \text{const}. \end{gathered} \tag{2}$$

Лемма 1. *Для ядра $(C, 1)$-средних*

$$F_n(t, x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{k} p_l(t) p_l(x) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

справедливо следующее представление:

$$F_n(t, x) = \frac{1}{n+1} \frac{1}{(t-x)^2} \xi_n(t, x), \quad |t - x| > 0,$$

где

$$\xi_n(t, x) = 2a_0^2 p_0(t) p_0(x) + a_n \{(a_{n+1} - a_n)[p_n(t) p_{n+2}(x) + p_n(x) p_{n+2}(t)] + a_n p_n(t)[p_{n+2}(x) - p_{n+1}(x)] + a_n p_n(x)[p_{n+2}(t) - p_{n+1}(t)] +$$

$$+ a_n p_{n+1}(x)\,[p_n(t) - p_{n+1}(t)] + a_n p_{n+1}(t)[p_n(x) - p_{n+1}(x)]\} +$$

$$+ 2\sum_{k=1}^{n}(a_k^2 - a_{k-1}^2) p_k(t) p_k(x) + \sum_{k=0}^{n} a_k(b_{k+1} - b_k)[p_k(t) p_{k+1}(x) + p_k(x) p_{k+1}(t)].$$

Имеют место следующие утверждения.

Теорема 1. *Пусть выполняются условия*

1) $\mu(x)$ — *абсолютно непрерывная конечная мера на промежутке* $I \subset (a, b)$;

2) *равномерно для всех* $x \in I \subset (a, b)$

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} p_k^2(x) = O(1) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots); \tag{3}$$

3) *почти для всех* $x \in I$

$$\max_{t \in I} |\xi_n(t, x)| = O_x(1) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots), \tag{4}$$

$$p_n(x) = O_x(1) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{5}$$

Тогда почти всюду на I *для любой* $f(x) \in L_{\mu(x)}(I) \cup L^2_{\mu(x)}((a, b)/I)$ *справедливо*

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n(f, x) = f(x). \tag{6}$$

Следствие 1. *Если система* $\{p_n(x)\}$ *равномерно ограничена на* I, *функция* $\mu(x)$ *абсолютно непрерывна и конечна на* I *и*

$$\sum_{k=1}^{n}(|a_{k-1}^2 - a_k^2| + |a_k(b_{k+1} - b_k)|) = Q(1) \quad (n = 1, 2, \ldots), \tag{7}$$

то разложение Фурье (1) *для* $f(x) \in L_{\mu(x)}(I) \cup L^2_{\mu(x)}((a, b)/I)$ *суммируется почти всюду на* I *к* $f(x)$ *методом* $(C, 1)$*-средних* (*а следовательно, и методом Пуассона — Абеля*).

Известно ([1], стр. 52), что система ортонормированных на $(-1, 1)$ полиномов Якоби равномерно ограничена во всяком внутреннем к $(-1, 1)$ промежутке I и, как нетрудно проверить, удовлетворяет условию (7).

Теорема 1 (и следствие из нее) решает указанные выше задачи из статьи [4] и книги [1] (при условии (7)). Отметим, что оценка (3) имеет место равномерно по $x \in I$, если функция $\mu(x)$ удовлетворяет условию $\mu'(x) \geqslant \mu_0 > 0$ равномерно для всех x из замкнутого промежутка, содержащего внутри себя интервал I ([1], стр. 47).

Теорема 2. *Предположим, что равномерно на промежутке* (a, b) *выполняются условия* (3) *и* (4), *а функция* $\mu(x) \in \mathrm{Lip}\,1$ (*на* (a, b)).

Тогда на интервале (a, b) *для* $f(x) \in L^p_{\mu(x)}$ $(p \geqslant 1)$ *имеют место следующие соотношения:*

1) $\|\sigma_n(f, x)\|_p \leqslant B\|f\|_p$ (*для* $1 \leqslant p \leqslant \infty$), *где постоянная* B *не зависит от* p, n *и функции* $f(x)$;

2) $\|\sigma_n(f, x) - f(x)\|_p \to 0$ $(n \to \infty)$ (*для* $1 \leqslant p < \infty$);

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n(f, x) = f(x)$ *почти всюду на* (a, b) (*для* $1 \leqslant p \leqslant \infty$);

4) $\|\sup\limits_n |\sigma_n(f, x)|\|_p \leqslant A_p\|f\|_p$ (*для* $1 < p \leqslant \infty$), *где константа* A_p *зависит лишь от* p.

Следствие 2. *Если система* $\{p_n(x)\}$ *равномерно ограничена на* (a, b), *то выполнение условий* (7) *и* $\mu(x) \in \mathrm{Lip}\,1$ (*на* (a, b)) *достаточно для справедливости утверждений теоремы* 2.

Доказательство теорем 1 и 2 основано на следующей лемме.

Лемма 2. *Пусть выполняются условия теоремы* 1.

Тогда при каждом n $(n=0,1,2,\dots)$ *существует неотрицательная функция* $F_n^*(t,x)$ (*интегрируемая горбатая мажоранта ядра* $F_n(t,x)$), *удовлетворяющая почти при всех* $x\in I$ *требованиям*

1) $|F_n(t,x)|\leqslant F_n^*(t,x)$ *для всех* $t\in I$;

2) $F_n^*(t,x)$ *при фиксированном* $x\in I$ *монотонно неубывает по* t *для* $t\leqslant x$ $(t\in I)$ *и монотонно невозрастает по* t *для* $t\geqslant x$ $(t\in I)$;

3) $\int\limits_I F_n^*(t,x)\,d\mu(t)=O_x(1)\quad(n=0,1,2,\dots;x\in I)$.

Кроме того, если имеют место условия теоремы 2, *то интегрируемая горбатая мажоранта ядра* $F_n(t,x)$ *симметрична и равномерно на* (a,b) *удовлетворяет условиям* 1)—3).

Тамбовский институт
химического машиностроения

Поступило
8 III 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Г. Алексич, Проблемы сходимости ортогональных рядов, ИЛ, 1963. [2] В. М. Бадков, Матем. заметки, **8**, 4, 431 (1970). [3] B. Muckenhoupt, Proc. Am. Math. Soc., **23**, 2, 306 (1969). [4] B. Muckenhoupt, E. M. Stein, Trans. Am. Math. Soc., **118**, 17 (1965). [5] H. Pollard, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., **32**, 5 (1946).