

УДК 536.7 + 621.391.2 + 621.317

ФИЗИКА

Р. П. ПОПЛАВСКИЙ

О ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИХ ПРЕДЕЛАХ ТОЧНОСТИ ФИЗИЧЕСКОГО ИЗМЕРЕНИЯ

(Представлено академиком В. Л. Гинзбургом 24 VI 1971)

1. Цель работы состоит в установлении предельных соотношений между точностью измерения и энергией Q_z , которую необходимо при этом рассеять. Определим относительную точность (в дальнейшем — просто точность) $1/\sigma$ физического измерения как отношение математического ожидания измеряемой величины к среднеквадратической погрешности (при оценке постоянной величины F) или как отношение априорной среднеквадратической погрешности к апостериорной (при оценке случайной величины F , имеющей априорное распределение $P(F)$ в заданной области Φ значений F ; в этом случае Q_z — среднее по $P(F)$ значение диссипированной энергии).

Показывается, что если время измерения ограничено постоянной времени измерительного прибора, то имеет место оценка

$$\sigma^2 Q_z \geq 2kT, \quad (1)$$

при неограниченном времени измерения оценка улучшается:

$$\sigma Q_z \geq 4kT. \quad (2)$$

Случай (1) соответствует (предельно) необратимой реализации процесса измерения, случай (2) — предельно «обратимой». Кавычки указывают на то, что оптимальная с точки зрения связи между σ и Q_z реализация процесса измерения, как будет показано, соответствует конечной скорости процесса — порядка тепловой.

2. Всякое физическое измерение связано с взаимодействием двух подсистем — исследуемой системы (и.с.) и измерительного прибора (и.п.) — таким, что происходит обмен энергией между и.с. и и.п., вследствие чего изменяется значение макроскопического параметра x регистрирующего устройства (р.у.) измерительного прибора. В общем случае и.п., кроме р.у., содержит также анализатор (а.), в котором происходит преобразование измеряемой величины F в другую физическую величину y , имеющую характер обобщенной силы, непосредственно действующей на р.у. *.

Предполагается, что и.с. и и.п. помещены в термостат с температурой T . Тепловые флуктуации параметров F , y , x (равновесные или неравновесные — в зависимости от модели) являются единственной причиной погрешности измерения. Измерение построено на том, что имеется однозначное соответствие между средними (по реализациям флуктуаций) значениями $\bar{F}$, $\bar{y}$, $\bar{x}$, и по значению $\bar{x}$ судят об измеряемой величине F . Предполагается линейная связь между $\bar{F}$, $\bar{y}$, $\bar{x}$.

Процесс измерения в моделях сводится к взаимодействию двух тел, первое из которых Y включает в себя и.с. вместе с анализатором и.п., вто-

* Предполагается, что измеряемая величина F также имеет характер обобщенной силы. В противном случае, кроме а. и р.у., для измерения требуется еще и датчик, преобразующий измеряемую величину в обобщенную силу F . В дальнейшем датчик включается в и.с., т. е. измеряемой величиной всегда является обобщенная сила F . Ниже будет отдельно упомянут случай, когда измеряемой величиной является не сила, а импульс.

рое X является регистрирующим устройством (для конкретности — механическим). Предполагается, что до измерения ($t < 0$) тела Y и X не взаимодействуют и находятся в начальном состоянии равновесия: $\bar{y}(t \leq 0) = \bar{x}(t \leq 0) = 0$.

Равновесными моделями назовем такие, в которых в процессе измерения ($t \geq 0$) устанавливается новое равновесное состояние связанной системы $Y + X$, характеризующее новыми равновесными значениями параметров $\bar{y}_\infty$, $\bar{x}_\infty$, пропорциональными измеряемой величине $\bar{F}$ (см., например, (1, 2)).

Неравновесными динамическими моделями назовем такие, в которых в процессе измерения максимальное изменение регистрирующего параметра $\bar{x}_{\max}(t_*)$ пропорционально $\bar{F}$ (конечное значение $\bar{x}(\infty) = \bar{x}(0) = 0$).

3. Рассмотрим вначале модели первого класса — такие равновесные модели, в которых точность измерения однозначно определяется переданной от тела Y телу X энергией U_x .

Переходный процесс в р.у. описывается уравнением

$$\mu \ddot{x} + \eta \dot{x} + \beta x = \kappa y \equiv f(t), \quad x(0) = \dot{x}(0) = 0. \quad (3)$$

Переходный процесс в анализаторе описывается либо уравнением

$$M \dot{y} + Hy = F - \kappa \dot{x}, \quad y(0) = 0, \quad (4)$$

если y — обобщенная скорость; либо уравнением

$$H \dot{y} + By = F + \kappa x, \quad y(0) = 0, \quad (5)$$

если y — обобщенная координата. Здесь введены обобщенные коэффициенты * инерции μ , M ; сопротивления η , H ; упругости $\beta = \partial^2 U_x / \partial x^2$, B ; κ — коэффициент связи подсистем Y и X .

Видно, что

$$\sigma_x^2 = \overline{\Delta x^2} / \bar{x}_\infty^2 = kT / 2U_x. \quad (6)$$

Известно, что если $f(t) = \kappa y(t)$ нарастает с быстро ($\tau_y \ll \tau_x$, τ_y и τ_x — постоянные времени тел Y и X соответственно), то диссипативные потери в теле X $Q_x = U_x$. Из уравнений видно, что анализатор может служить «демпфером», замедляющим нарастание силы в (3). При этом, однако, хотя и можно добиться $Q_x \rightarrow 0$, диссипативные потери в анализаторе $Q_y > U_x$. Этот результат следует из того, что коэффициент связи κ ограничен сверху. Энергетически оптимальными являются такие значения κ , при которых ** $\sigma_y^2 = \sigma_x^2$ (см. (6)): именно в этом случае достигается нижняя граница оценки (1), где $Q_x = Q_y + Q_x$.

Таким образом, для уменьшения диссипации при измерении недостаточно замедлить нарастание силы в X : необходимо также замедлить нарастание силы в Y . В рассматриваемой модели это можно сделать лишь путем введения третьего тела Z — регулятора, который медленно меняет параметры H в (4) или B в (5). Но так как регулятор также участвует в тепловом движении, то оказывается, что — при заданной U_x (т. е. точности $1/\sigma$) — уменьшение Q_x не беспредельно.

Пусть регулятор обеспечивает оптимальный закон нарастания силы $f(t)$ в (3):

$$f(t) = \begin{cases} \beta x(t) + \varepsilon & \text{при } 0 \leq t \leq t_0, \\ f_\infty = \text{const} & \text{при } t > t_0. \end{cases} \quad (7)$$

* В частном случае, когда Y — электрическая цепь, система (3), (4) описывает переходный процесс в гальванометре (см. (2)), система (3), (5) — в электрометре.

** Отметим, что составляющую σ_F^2 можно не учитывать, так как энергия, связанная с параметром F , может сколь угодно повышать энергию взаимодействий U_x и не влияет на диссипацию.

Тогда диссипация Q_1 , связанная с уменьшением скорости, уменьшается в $n = t_0 / (4\tau_x)$ раз (необратимая реализация процесса соответствует средней скорости $x_\infty / (4\tau_x)$). С другой стороны, вследствие (7), уравнение (3) превращается в $\mu\ddot{x} + \eta\dot{x} = \varepsilon$, когда следует учитывать броуновский уход*

$$\overline{\Delta x^2}(t_0) = \frac{2kT}{\eta} t_0. \quad (8)$$

При $t = t_0$, когда $f(t) = f_\infty$, тело X попадает в потенциальную яму, причем его энергия тем больше превышает равновесное значение $\beta\Delta x_0^2/2 = kT/2$, чем больше t_0 . Эта энергия отдается термостату, что соответствует второму члену диссипативных потерь Q_2 . Из условия

$$Q_x = Q_1 + Q_2 = 2U_x 4\tau_x / t_0 + 2kT t_0 / (4\tau_x) \rightarrow \min \quad (9)$$

получим

$$Q_{x \min} = 4 \sqrt{U_x kT}, \quad \left(\frac{t_0}{4\tau_x} \right)_{\text{опт}} = n_{\text{опт}} = \sqrt{\frac{U_x}{kT}} = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma_x} = \frac{1}{\sigma}, \quad (10)$$

откуда сразу следует оценка (2). Тот же результат получается при дискретной реализации замедления, когда регулятор фиксирует каждое i -е промежуточное равновесное состояние ($i = 1, 2, \dots, n$). Так как фиксация каждого равновесного состояния требует энергетической связи регулятора с системой, превышающей kT , то каждый i -й переход связан с диссипацией $Q_{i \min} > kT$.

4. Рассмотрим модели второго класса, когда оценка (1) получается непосредственно и не может быть улучшена (при этом $U_x > U_{x \min}$ по (6)).

Пусть измеряемая величина F , в отличие от рассмотренной модели, не сосредоточенный параметр, а медленно убывает с расстоянием z . Тогда роль регулятора Z играет «тележка», медленно приближающаяся тело X к и.с.

В этом случае оптимальный закон нарастания силы

$$f(t) = bx(t) + \varepsilon, \quad |\beta - b| = \beta_{\text{эф}} \ll \beta, \quad (11)$$

и в уравнении (3) вместо β будет $\beta_{\text{эф}}$. Тогда диссипация уменьшается в $\beta / \beta_{\text{эф}}$ раз, но средний квадрат погрешности увеличивается во столько же раз, так что оценка (1) не улучшается. При этом, однако, связь между диссипированной энергией Q_x и переданной U_x может быть лучше, чем по (10), но между точностью и U_x — существенно хуже, чем в (6).

Таким образом, лишь при такой передаче энергии U_x , при которой из системы извлекается информация, характеризуемая точностью по (6), имеет место ограничение (10) в приближении к обратимому процессу.

Динамическая неравновесная модель измерения может быть реализована при том же законе (11), если «тележка» движется из $z = -\infty$ к $z = \infty$. При этом броуновский уход (8) в $x_{\max}(t_0)$ определяет погрешность измерения и вновь справедлива оценка (1), так как средний квадрат погрешности обратно пропорционален вязкости, а диссипация прямо пропорциональна ей. В частности, когда измеряется не сила, а импульс, оценка (1) так же не может быть улучшена, и единственный способ увеличения точности измерения состоит в увеличении вязкости (в переходе от колебательного режима к режиму, граничному с аperiодическим).

5. Из (1), (2) видно, что минимальный рост энтропии в системе за счет диссипации полностью определяется точностью измерения и способом его реализации (необратимым или предельно «обратимым»):

$$\Delta S_{\text{н}} = Q_x / (kT) = 2 / \sigma^2, \quad \Delta S_0 = 4 / \sigma. \quad (12)$$

* Т. е. с уменьшением разности сил ε увеличивается недетерминированное (броуновское) рассогласование сил.

Количество полученной информации по Шеннону $I \cong \ln(1/\sigma)$ определяет по ⁽³⁾ негэнтропийный эффект (уменьшение энтропии в системе за счет наложения связи между параметрами в процессе взаимодействия). Видно, что энергетическая цена единицы информации $Q_s/I = kTe^I/I$, т. е. тем больше превышает kT (нижнюю оценку Бриллюэна ⁽³⁾), чем выше точность $1/\sigma$ измерения*.

Автор благодарен акад. В. Л. Гинзбургу и участникам руководимого им семинара, в особенности В. М. Файну, за внимание и интерес к работе.

Поступило
23 VI 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ Я. И. Френкель, Статистическая физика, Изд. АН СССР, 1948. ² М. А. Леонтович, Статистическая физика, М.—Л., 1944. ³ Л. Бриллюэн, Наука и теория информации, М., 1960.

* Заметим, что параметры модели не вошли в окончательный результат (1), (2). Однако, как всегда при модельном рассмотрении, остается открытым вопрос о независимости результата от выбранной модели.