Доклады Академии наук СССР
1971. Том 200, № 3

УДК 517.9 *МАТЕМАТИКА*

Ю. А. ДУБИНСКИЙ

О НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧЕ ТИПА ЗАДАЧИ ЗАРЕМБЫ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 23 III 1971)

Рассматривается краевая задача для гиперболического уравнения с граничными условиями, имеющими разрыв, аналогичная известной задаче Зарембы для эллиптического уравнения. Особенность задачи в том, что одно из граничных условий является нелинейным. Устанавливаются теоремы существования и единственности этой задачи.

Пусть $G \subset \mathbf{R}^n$ — область с границей Γ, удовлетворяющей условию конуса ([1]).

Допустим, что граница Γ представлена в виде $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, причем $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \phi$. В цилиндре $Q = [0, T] \times G$, $0 < T < \infty$, с боковой поверхностью $S = S_1 \cup S_2$ ($S_i = [0, T] \times \Gamma_i$, $i = 1, 2$) рассматривается краевая задача:

$$\mathfrak{A}(u) \equiv u'' + L(x, D)u = h(t, x); \tag{1}$$

$$u(0, x) = u'(0, x) = 0, \quad u|_{S_1} = 0; \tag{2}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{S_2} = \frac{\partial}{\partial t} M(u|_{S_2}) + N(u|_{S_2}) + f(t, x'), \quad x' \in \Gamma_2. \tag{3}$$

Здесь $L(x, D)u \equiv -D_i(a^{ij}(x)D_j)$ $(a^{ij} = a^{ji})$ — положительно определенный эллиптический оператор в области G; $D_i \equiv \partial / \partial x_i$, $u' \equiv \partial u / \partial t$; $M(u)$, $N(u)$ — непрерывные неубывающие функции, причем $N(u)u \geqslant 0$ при $|u| \to +\infty$. В условии (3) $\partial u / \partial \nu$ есть дифференцирование по конормали.

Положим $m(u) = M(u)u - \int\limits_0^u M(\xi)\,d\xi$. Нетрудно видеть, что $m(u) \to +\infty$ при $|u| \to \infty$; более того,

$$m(u) / M(u) \to +\infty. \tag{4}$$

Определение. $\mathscr{H} = \{u(t,x)\colon\ u \in H^1(Q),\ \langle m(u),\ 1\rangle_{S_2} > \infty,\ \langle (T-t)N(u), u\rangle > \infty\}$, где H_r $(r \in \mathbf{R}^1)$ — пространство Соболева, $\langle \cdot, \cdot \rangle_{S_2}$ — интеграл по S_2.

Замечание. Если $u(t, x) \in \mathscr{H}$ удовлетворяет уравнению (1), то $u'' \in L_2(0, T; H^{-1}(G))$ так, что отображение u': $[0, T] \to H^{-1}(G)$ непрерывно, т. е. $u'(t, x)$ имеет след $u'(0, x)$ при $t = 0$. Точно так же из (1) вытекает, что $L(x, D)u \in L_2(G; H^{-1}(0, T))$, откуда следует (см., например, ([2])), что $\partial u / \partial \nu \in H^{-1/2}(G; H^{-1}(0, T))$. Таким образом, условия (3) определены в смысле теории распределений, сосредоточенных на поверхности S_2.

Допустим вначале, что функция $M(u)$ дифференцируема.

Теорема 1. *Пусть $M(u) \in C^1(\mathbf{R}^1)$, $h(t, x) \in L_2(Q)$, $f(t, x') \in L_2(S_2)$. Тогда существует функция $u(t, x) \in \mathscr{H}$, являющаяся решением задачи (1)—(3). При этом дополнительно*

$$\langle (T-t)M'(u)u', u'\rangle_{S_2} < \infty.$$

Доказательство. Обозначим через $\overset{\circ}{H}{}^1(Q, S_1)$ замыкание в метрике $\langle \nabla u, \nabla u\rangle_Q$ гладких функций, финитных при $t \to T$ и вблизи поверхности S_1. Пусть $v_j(t, x)$, $j = 1, 2, \ldots,$ — полная система в $\overset{\circ}{H}{}^1(Q, S_1)$. Приближенное решение $u_k(t, x)$ задачи (1) — (3) ищем в виде

$$u_k(t, x) = \theta(t) e^{-\gamma t} * (T-t)^{-1} f_k(t, x),$$

где $f_k(t, x) = c_1 v_1(t, x) + \ldots + c_k v_k(t, x)$; $\gamma > 0$ — вспомогательный параметр, $\theta(t)$ — функция Хевисайда.

Неизвестные постоянные $c_1, \ldots, c_k$ определяются из системы моментных уравнений

$$\langle \mathfrak{A}(u_k), v_r\rangle \equiv -\langle u_k', v_r'\rangle_Q + \langle a^{ij}(x) D_j u_k, D_i v_r\rangle_Q +$$
$$+ \left\langle \frac{\partial}{\partial t} M(u_k) + N(u_k) + f(t, x'), v_r\right\rangle_{S_2} = \langle h, v_r\rangle_Q, \quad r = 1, \ldots, k. \tag{5}$$

Лемма. *Имеет место неравенство*

$$\langle \mathfrak{A}(u_k), (T-t)(u_k' + \gamma u_k)\rangle_Q \geqslant a_0 (\langle \nabla u_k, \nabla u_k\rangle_Q + \langle M'(u_k) u_k',$$
$$(T-t) u_k'\rangle_{S_2} + \langle m(u_k), 1\rangle_{S_2} + \langle (T-t) N(u_k), u_k\rangle_{S_2} - K, \tag{6}$$

где $a_0 > 0$, а постоянная K зависит от $f(t, x')$ и $h(t, x)$.

Доказательство. Интегрируя по частям и используя элементарные неравенства, имеем при $1 - 2\gamma T > 0$ неравенство

$$\langle \mathfrak{A}(u_k), (T-t)(u_k' + \gamma u_k)\rangle_Q \geqslant a_1 (\langle \nabla u_k, \nabla u_k\rangle_Q + \langle u_k, u_k\rangle_Q +$$
$$+ \langle M'(u_k) u_k', (T-t) u_k'\rangle_{S_2} + \langle m(u_k), 1\rangle_{S_2} + \langle N(u_k), (T-t) u_k\rangle_{S_2} -$$
$$- |\langle f, (T-t)(u_k' + \gamma u_k)\rangle_{S_2}| - K_1, \tag{7}$$

где $a_1 > 0$, $K_1 > 0$.

Поскольку оператор сужения $u|_{S_2}$: $H^1(Q) \to L_2(S_2)$ непрерывен (и, что необходимо в дальнейшем, вполне непрерывен), то

$$|\langle f, (T-t)(u_k' + \gamma u_k)\rangle_{S_2}| \leqslant K_2 \langle |f| + |f'|, |u_k|\rangle_{S_2} \leqslant$$
$$\leqslant K_3 (\langle f, f\rangle_{S_2}^{1/2} + \langle f', f'\rangle_{S_2}^{1/2}) \langle u_k, u_k\rangle_{S_2}^{1/2} \leqslant K_4 \langle \nabla u_k, \nabla u_k\rangle_Q^{1/2},$$

где $K_4 > 0$ — постоянная, зависящая, очевидно, от f.

Учитывая полученное неравенство, из (7) получаем искомое неравенство (6). Лемма доказана.

Доказанная лемма обеспечивает разрешимость нелинейной системы (5) (см., например, [3, 4] и др.). Кроме того, справедлива, очевидно, оценка

$$\langle \nabla u_k, \nabla u_k\rangle_Q + \langle M'(u_k) u_k', (T-t) u_k'\rangle_{S_2} + \langle m(u_k), 1\rangle_{S_2} +$$
$$+ \langle N(u_k), (T-t) u_k\rangle_{S_2} \leqslant K_5(h, f). \tag{8}$$

Из этой оценки вытекает, что последовательность $\{u_k(t, x)\}$ слабо сходится в $H^1(Q)$ (вообще говоря, после выбора подпоследовательности).

Покажем, что предельная функция $u(t, x)$ является искомым решением задачи (1) — (3). Очевидно, можно считать, что $u_k(t, x) \to u(t, x)$ почти всюду на S_2, так что $u(t, x) \in \mathscr{H}$; кроме того, $u(0, x) = 0$, $u|_{S_1} = 0$.

Используя неравенство (4) и теорему Валле — Пуссена [5], получаем что при $k \to \infty$ из (5) вытекает соотношение

$$\langle \mathfrak{A}(u), v_j\rangle_Q = \langle h, v_j\rangle_Q$$

и, как следствие, тождество

$$\langle \mathfrak{A}(u), v\rangle_Q = \langle h, v\rangle_Q \quad \forall v(t, x) \in \overset{\circ}{H}{}^1(Q, S_1). \tag{9}$$

Оно означает, что $u(t, x)$ есть решение уравнения (1), причем справедливо граничное условие (3). Осталость доказать, что $u'(0, x) = 0$. Для этого заметим, что если $lu = \{u$ при $t \geqslant 0$; 0 при $t < 0\}$, то уравнение (1) эквивалентно уравнению

$$\mathfrak{A}(lu) = h(t, x) + u'(0, x) \otimes \delta(t), \tag{10}$$

ибо $u(0, x) = 0$.

С другой стороны, поскольку при $t = 0$ значения функции $v \in \mathring{H}^1(Q, S_1)$ произвольны, равенство (9) означает, что

$$\mathfrak{A}(lu) = h(t, x).$$

Сравнивая последнее равенство с (10), выводим, что $u'(0, x) = 0$. Теорема 1 доказана.

Замечание. Очевидно, вместо (1) можно рассмотреть нелинейное уравнение вида

$$u'' + L(x, D)u + a(u)u' + b(u) = h(t, x), \tag{1'}$$

где $a(u) \geqslant 0$, $b(u)$ — неубывающая непрерывная функция; $b(u)u \geqslant 0$ при $|u| \to \infty$.

Рассуждения при доказательстве существования решения задачи (1′), (2), (3) те же самые.

Из теоремы 1 вытекает более общая

Теорема 2. *Пусть функция $M(u) \in C^0(\mathbf{R}^1)$ и дифференцируема при достаточно больших значениях $|u|$.*

Тогда для любой функции $h(t, x) \in L_2(Q)$ и функции $f(t, x')$ такой, что $f'(t, x') \in L_2(S_2)$ задача (1)—(3) разрешима в классе $\mathscr{H}$.

Доказательство. Пусть $M_\varepsilon(u) \in C^1(\mathbf{R}^1)$ — последовательность функций такая, что при $\varepsilon \to 0$ $M_\varepsilon(u) \to M(u)$, причем $M_\varepsilon(u) \equiv M(u)$ при $|u| \geqslant 1$. Пусть $u_\varepsilon(t, x)$ — решение задачи (1)—(3), где $M(u)$ заменена на $M_\varepsilon(u)$. Для решений $u_\varepsilon(t, x)$ справедлива оценка (8), откуда следует, что семейство $\{u_\varepsilon(t, x)\}$ компактно в $\mathscr{H}$.

Предельная функция есть решение исходной задачи. Теорема 2 доказана.

Замечание. В ряде важных случаев (ограниченные функции, функции степенного роста и т. п.) условие $M(u) \in C^1$ при $|u| \geqslant 1$ излишне (ср. ([6])).

Обратимся теперь к вопросу единственности решения.

Теорема 3. *Пусть $u_1(t, x) \in \mathscr{H}$, $u_2(t, x) \in \mathscr{H}$ — два решения задачи* (1)—(3). *Допустим, что выполнено одно из условий:*

а) $N(u) \equiv 0$,

б) *для всех u_1 и u_2 из области значений $u_1(t, x)$ и $u_2(t, x)$ справедливы неравенства*

$$[M(u_1) - M(u_2)] / (u_1 - u_2) \geqslant a_0 > 0,$$

$$[N(u_1) - N(u_2)] / (u_1 - u_2) \leqslant A_0 < \infty.$$

Тогда $u_1(t, x) \equiv u_2(t, x)$.

Доказательство. Положим $v'(t, x) \equiv u_1(t, x) - u_2(t, x)$, $v(0, x) = 0$. Для функции $v(t, x)$ имеем

$$v'' + L(x, D)v = 0, \quad v(0, x) = v'(0, x) = v|_{S_1} = 0; \tag{11}$$

$$\partial v / \partial \nu |_{S_2} = M(u_1|_{S_2}) - M(u_2|_{S_2}) + \int_0^t [N(u_1|_{S_2}) - N(u_2'|_{S_2})] \, d\tau, \tag{12}$$

2 Заказ 2641, т. 200, № 3

откуда для любого $t \in [0, T]$ получаем неравенство

$$a_0 \langle \nabla v(\tau, x), \nabla v(\tau, x)\rangle_G + \langle \partial v/\partial \nu, \partial v/\partial t\rangle_{S_2^t} \leqslant 0,$$

где $a_0 > 0$, $S_2^t = [0, t] \times \Gamma_2$,

$$\langle \partial v/\partial \nu, \partial v/\partial t\rangle_{S_2^t} = \langle M(u_1) - M(u_2), \partial v/\partial t\rangle_{S_2^t} +$$

$$+ \left\langle \int_0^\tau [N(u_1) - N(u_2)]\, d\eta, \partial v/\partial t \right\rangle_{S_2^t}.$$

В силу условий а) или б) $\langle \partial v/\partial \nu, \partial v/\partial t\rangle_{S_2^t} \geqslant 0$, если только $t \leqslant a_0 A_0^{-1}$. Следовательно, $u_1(t, x) \equiv u_2(t, x)$ при $0 \leqslant t \leqslant a_0 A_0^{-1}$. Повторяя это рассуждение, получаем, что $u_1(t, x) \equiv u_2(t, x)$ при $0 \leqslant t \leqslant T$. Теорема доказана.

Московский энергетический институт

Поступило 11 III 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Л. Соболев, Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Новосибирск, 1962. [2] Ж. Лионс, Э. Мадженес, Неоднородные задачи и их приложения, М., 1970. [3] М. И. Вишик, ДАН, 137, № 3, 502 (1961). [4] J. L. Lions, Quelques méthodes de résolution des problemes aux limites non lineaires, Paris, 1969. [5] И. П. Натансон, Теория функций вещественной переменной, М., 1957. [6] Ю. А. Дубинский, Б. П. Нестеров, Дифференциальные уравнения, 7, № 1, 184 (1971).