

Е. Б. ДЫНКИН

НЕКОТОРЫЕ ВЕРОЯТНОСТНЫЕ МОДЕЛИ РАЗВИВАЮЩЕЙСЯ ЭКОНОМИКИ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 26 III 1971)

1. В настоящей заметке методы теории управляемых случайных процессов соединяются с соображениями выпуклости, характерными для детерминированных моделей развивающейся экономики (см., например, (1)). Результатом является вероятностная теория, во многом сходная с детерминированной, но учитывающая влияние случайных факторов. Для начала мы ограничиваемся конечношаговыми процессами.

2. Конечношаговый детерминированный управляемый процесс может быть описан следующим образом. Задаются: а) произвольное множество Z (пространство состояний); б) точка $z_0 \in Z$ (начальное состояние); в) функции $u_t(z)$ ($z \in Z$; $t = 1, 2, \dots, N$) (целевые функции); г) отображения a_t ($t = 0, 1, \dots, N-1$), сопоставляющие каждой точке $z \in Z$ непустое подмножество $a_t(z)$ множества Z (совокупность состояний, доступных в момент t из z). Последовательность $z_1, z_2, \dots, z_N \in Z$ называется планом, если для каждого $t = 1, 2, \dots, N$ $z_t \in a_t(z_{t-1})$. Требуется найти оптимальный план, для которого достигает максимума сумма $\sum u_t(z_t)$ (индекс суммирования t во всех формулах пробегает значения $1, 2, \dots, N$).

Для того чтобы оптимальный план существовал, достаточно предположить, что Z — метрическое пространство, функции u_t полунепрерывны сверху и отображения a_t квазинепрерывны. (Мы называем отображение a квазинепрерывным, если для любых последовательностей $x_n \rightarrow x$ и $y_n \in a(x_n)$ найдется точка $y \in a(x)$, предельная для y_n .)

Нас будет интересовать случай, когда выполнены все эти предположения и, кроме того, Z — замкнутое выпуклое множество в евклидовом пространстве, u_t — вогнутые функции и a_t — вогнутые отображения (последнее означает, что $p_1 y_1 + p_2 y_2 \in a_t(p_1 x_1 + p_2 x_2)$ для любых $y_i \in a_t(x_i)$, $y_2 \in a_t(x_2)$ и любых $p_1 \geq 0, p_2 \geq 0, p_1 + p_2 = 1$).

С точки зрения экономики z_t характеризует состояние производства, а отображение a_t — состояние технологии в момент t . Особенно важен следующий специальный класс отображений a_t . Пусть в пространстве Z заданы подмножества $\mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_N$, функции $g_1, \dots, g_N$ и $h_0, \dots, h_{N-1}$, значениями которых являются неотрицательные l -мерные векторы. Множество $a_t(z)$ задается как совокупность всех $z' \in \mathcal{T}_t$, для которых $g_t(z') \leq h_{t-1}(z)$. На экономическом языке $g_t(z)$ — вектор затрат, а $h_t(z)$ — вектор выпуска в момент t в состоянии z . Ограничение $g_t(z_t) \leq h_{t-1}(z_{t-1})$ выражает тот факт, что затраты на каждом шаге не могут превышать выпуска на предыдущем шаге. Чтобы $a_t(z)$ было непусто при любом z , достаточно, чтобы среди значений g_t на $\mathcal{T}_t$ содержался нулевой вектор. Для того чтобы a было квазинепрерывно, достаточно, чтобы функции g_t и h_t были полунепрерывны сверху и $\mathcal{T}_t$ было компактно. Для вогнутости a_t достаточно, чтобы $\mathcal{T}_t$ было выпукло, а функции g_t и h_t вогнуты.

3. Пусть теперь имеется случайный параметр s , принимающий значения из некоторого множества S . (В экономической модели можно, напри-

мер, считать, что z описывает состояние научно-технических знаний или состояние конъюнктуры.) Обозначим через s_t значение этого параметра, наблюдаемое в момент t . Распределение вероятностей $s_1, \dots, s_N$ считается известным. Предполагается, что a_t и u_t зависят от $s^t = (s_1, s_2, \dots, s_t)$. Относительно a_t и u_t как функций от z делаются предположения п.2. Кроме того требуется, чтобы a_t и u_t были измеримы по s^{**} и чтобы u_t были ограничены сверху.

Последовательность измеримых функций $\xi_t(s^t)$ ($t = 1, 2, \dots, N$) называется *планом*, если при любых значениях $s_1, s_2, \dots, s_N$

$$\xi_t(s^t) \in a_t(s_t, \xi_{t-1}(s^{t-1})) \quad (t = 1, 2, \dots, N)$$

(при этом, по определению, $\xi_0 = z_0$). План оптимален, если для него достигается максимального значения математическое ожидание $U(\xi) =$

$$= M \sum u_t(s^t, \xi_t).$$

Теорема 1. Существует оптимальный план $\xi_t(s^t) = F_t(s^t, \xi_{t-1}(s^{t-1}))$. Определяющие его функции F_t могут быть найдены из уравнения

$$v_t(s^t, z) = \psi_t(s^t, F_t),$$

где v_t, ψ_t задаются рекуррентными формулами

$$v_{N+1} = \psi_{N+1} = 0, \quad v_t(s^t, z) = \sup_{z' \in a_t(s^t, z)} \psi_t(s^t, z'),$$

$$\psi_t(s^t, z) = u_t(s^t, z) + \int_S p_t(ds_{t+1}|s^t) v_{t+1}(s^{t+1}, z),$$

($p_t(ds_{t+1}|s^t)$ — условное распределение s_{t+1} при известном s^{t**} . Максимальное значение $U(\xi)$ равно $Mv_1(s_1, z_0)$).

Если процесс $s_1, s_2, \dots, s_N$ марковский, то функции F_t можно выбрать так, чтобы они зависели только от s_t и z (и не зависели от $s_1, \dots, s_{t-1}$).

4. Вернемся теперь к случаю, когда $a_t(z) = \mathcal{F}_t \cap \{z': g_t(z') \leq h_{t-1}(z)\}$ (см. п.2). Будем считать, что $\mathcal{F}_t, u_t, g_t$ и h_t — измеримые функции s^t . Тогда a_t также измеримо по s^t .

Пусть W^* — пространство, сопряженное к l -мерному арифметическому пространству W . Положим $\gamma \in W^*$, если $\gamma \in W^*$ и $(\gamma, w) \geq 0$ при $w \geq 0$. Введем в W норму $\|w\|$, равную сумме абсолютных величин координат. Соответствующая норма в W^* равна максимуму абсолютных величин координат. Обозначим через $\mathcal{Z}$ совокупность всех измеримых функций $\xi(s^t)$, удовлетворяющих при любом s^t условию $\xi(s^t) \in \mathcal{F}_t(s^t)$.

Измеримые функции $\pi_t(s^t)$ со значениями в W^* называются *К-ценами*, если для любого оптимального плана ξ_t и любых $\xi_t \in \mathcal{Z}_t$

$$M \sum [u_t(\xi_t) + (\pi_t, h_{t-1}(\xi_{t-1}) - g_t(\xi_t))] \leq M \sum u_t(\bar{\xi}_t). \quad (1)$$

(Для сокращения мы опускаем всюду, где это не может привести к недоразумениям, аргумент s^t .)

Теорема 2. Для существования К-цен достаточно, чтобы нашлась постоянная k такая, что для любых t, s^t и любых $z, \hat{z} \in Z_t, w, \hat{w} \in W$

$$|h_t(z) - h_t(\hat{z})| \leq k\rho(z, \hat{z}), \quad |u_t(z) - u_t(\hat{z})| \leq k\rho(z, \hat{z}),$$

$$\rho(\mathcal{F}_t^w, \mathcal{F}_t^{\hat{w}}) \leq k\|w - \hat{w}\|,$$

* Речь идет об измеримости по отношению к $\mathcal{F} \times \dots \times \mathcal{F}$, где $\mathcal{F}$ — фиксированная σ -алгебра в пространстве S . Измеримость $a(s)$ означает, по определению, что для любого $z \in Z$ измерима функция $\rho(z, a(s))$ (ρ — расстояние в Z).

** Для существования этого условного распределения достаточно, чтобы $(S, \mathcal{F})$ было стандартным борелевским пространством. Впрочем, можно обойтись и без условных распределений, полагая $\psi_t(s^t, z) = u_t(s^t, z) + M[v_{t+1}(s^{t+1}, z) | s^t]$ и выбирая значение условного математического ожидания так, чтобы оно было вогнуто и непрерывно сверху по z (это можно сделать всегда).

где $\mathcal{F}_i^* = \mathcal{F}_i \cap \{z: g_i(z) \leq w\}$ и под расстоянием $\rho(A, B)$ между множествами A и B понимается наибольшее из двух чисел $\sup_{z \in A} \rho(z, B)$ и $\sup_{z \in B} \rho(z, A)$.

В детерминированном случае теорема 2 была доказана Гейлом ⁽²⁾.

Полагая в (1) $\xi_i = \bar{\xi}_i$ и учитывая, что $g_i(\bar{\xi}_i) \leq h_{i-1}(\bar{\xi}_{i-1})$, получаем, что с вероятностью 1

$$(\pi_i, g_i(\bar{\xi}_i)) = (\pi_i, h_{i-1}(\bar{\xi}_{i-1})). \quad (2)$$

Доказывается, что при условии (2) неравенства (1) равносильны требованию, чтобы при всех $\xi_i \in \mathcal{Z}_i$

$$\begin{aligned} & M[u_i(\xi_i) + (\pi_{i+1}, h_i(\xi_i)) - (\pi_i, g_i(\xi_i))] \leq \\ & \leq M[u_i(\bar{\xi}_i) + (\pi_{i+1}, h_i(\bar{\xi}_i)) - (\pi_i, g_i(\bar{\xi}_i))]. \end{aligned} \quad (3)$$

Если функции u_i строго вогнуты по z , то условия (3) равносильны

$$\begin{aligned} & u_i(\bar{\xi}_i) + (\bar{\pi}_{i+1}, h_i(\bar{\xi}_i)) - (\pi_i, g_i(\bar{\xi}_i)) = \\ & = \sup_{z \in \mathcal{F}_i} [u_i(z) + (\bar{\pi}_{i+1}, h_i(z)) - (\pi_i, g_i(z))] \end{aligned}$$

с вероятностью 1, где $\bar{\pi}_{i+1} = M(\pi_{i+1} | s')$. (Последний результат был получен И. В. Евстигнеевым.)

5. Доказательство теоремы 1 основано на следующей общей теореме об измеримом выборе.

Теорема 3. Пусть каждому s из измеримого пространства $(s, \mathcal{F})$ сопоставлено непустое компактное подмножество $a(s)$ метрического пространства Z . Если $\rho(z, a(s))$ измеримо при любом $z \in Z$, то можно выбрать из каждого множества $a(s)$ по одной точке $z(s)$ так, чтобы функция $z(s)$ была измерима.

Опираясь на теорему 3, мы доказываем, что если функция $f(s^t, z)$ ограничена сверху, измерима по s^t , вогнута и полунепрерывна сверху по z , то аналогичными свойствами обладают функции

$$f'(s^t, z) = \sup_{z' \in a_t(s^t, z)} f(s^t, z), f''(s^{t-1}, z) = \int_S p_{t-1}(ds_t | s^{t-1}) f(s^t, z).$$

После этого для доказательства теоремы 1 достаточно использовать стандартный метод динамического программирования.

Чтобы доказать теорему 2, мы рассматриваем банахово пространство Q , элементами которого служат наборы $q = \{q_t\}$ измеримых функций $q_t(s^t)$ ($t = 1, 2, \dots, N$) со значениями в пространстве W и норма опре-

деляется формулой $\|q\| = M \sum \|q_t\|$. Положим $q \in \bar{Q}$, если $q \in Q$ и есть

для некоторого набора $\xi_i \in \mathcal{Z}_i$ $g_i(s^t, \xi_i) \leq h_{i-1}(s^{t-1}, \xi_{i-1}) + q_i(\xi_i)$. Обо-

значим через $\mu(q)$ верхнюю грань $M \sum u_i(s^t, \xi_i)$ по всем таким наборам

ξ_i . Опираясь на теорему 1, доказываем, что $|\mu(q) - \mu(0)| \leq c \|q\|$, для всех $q \in \bar{Q}$. Из этой оценки следует существование линейного функционала l в пространстве Q , для которого $\mu(q) - \mu(0) \leq l(q) \leq c \|q\|$

($q \in \bar{Q}$). Функционал l представляется в виде $l(q) = M \sum (\pi_i, q_i)$, где

$\pi_i(s^i)$ — измеримые функции со значениями в W^* . Функции π_i являются K -ценами.

Центральный экономико-математический институт
Академии наук СССР
Москва

Поступило
10 III 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ D. Gale, Bull. Am. Math. Soc., 74, 2, 207 (1968). Сб. пер. Математика, 14, 6, 160 (1970). ² D. Gale, Rev. Econ. Studies, 34, 1, 1 (1967).