

П. С. СОЛТАН

О ПОКРЫТИИ МНОГОГРАННИКОВ ГОМОТЕТАМИ

(Представлено академиком П. С. Александровым 18 VI 1971)

Пусть K — ограниченное выпуклое тело n -мерного евклидова пространства E^n . Через $b(K)$ обозначим минимальное число гомотетов ⁽¹⁾, т. е. тел, гомотетичных телу K с положительными коэффициентами гомотетии, меньшими единицы, покрывающих все тело K . Г. Хадвигером ⁽¹⁾, а также И. Ц. Гохбергом и А. С. Маркусом ⁽²⁾ была высказана следующая гипотеза: для любого ограниченного выпуклого тела $K \subset E^n$ справедливы неравенства $n + 1 \leq b(K) \leq 2^n$, причем равенство $b(K) = 2^n$ имеет место лишь в случае, если K — параллелепипед. Для $n = 2$ справедливость этого утверждения установлена в ^(2, 5, 9). Усилия, приложенные для проверки этой гипотезы при $n \geq 3$, привели к постановке родственных задач и к ряду частичных результатов (см. ^(3-8, 10-14)).

Цель настоящей заметки — доказать следующие два результата, относящиеся к тому же направлению.

Теорема 1. Если многогранник $M^n \subset E^n$ обладает тем свойством, что каждая его грань любой размерности является центрально-симметричным множеством, то справедливы неравенства

$$n + 1 \leq b(M^n) \leq 2^n, \quad (1)$$

причем равенство $b(M^n) = 2^n$ имеет место лишь в случае, когда M^n — параллелепипед.

Теорема 2. Если центрально-симметричный многогранник $M^3 \subset E^3$ обладает тем свойством, что никакая его двумерная грань не может быть покрыта одним гомотетом, то справедливы неравенства

$$4 \leq b(M^3) \leq 2^3,$$

причем равенство $b(M^3) = 2^3$ имеет место лишь в случае, когда M^3 — параллелепипед.

Перейдем к описанию основных идей доказательства. Через $\text{bd } K$ и $\text{int } K$ обозначим соответственно границу и внутренность тела $K \subset E^n$. Точка $x \in \text{bd } K$ называется освещенной (извне) некоторым направлением l пространства E^n , если луч направления l , исходящий из точки x , проходит через некоторую точку $y \in \text{int } K$. Множество $N \subset \text{bd } K$ называется освещенным направлениями $l_1, l_2, \dots, l_i$, если любая точка множества N освещена хотя бы одним из этих направлений. Пусть $c(K)$ — минимальное число направлений в E^n , освещающих всю границу $\text{bd } K$ тела K . В. Г. Болтянский показал ⁽³⁾ что $b(K) = c(K)$ для любого ограниченного тела $K \subset E^n$. В связи с этим наши дальнейшие построения в основном будут описаны в терминах освещения. Например, теорема 2 означает, что если никакая грань центрально-симметрического многогранника $M^3 \subset E^3$ не освещается одним направлением, то $c(M^3) \leq 2^3$. Любопытно отметить, по интуитивным соображениям, что наличие граней, освещаемых одним направлением, лишь может не увеличить число $c(M^3)$, так что теорема 2 «почти» устанавливает неравенство $c(M^3) \leq 2^3$ для любого центрально-симметричного многогранника $M^3 \subset E^3$. Однако получить полное доказательство этого факта автору пока не удалось.

Доказательство теоремы 1 проведем методом индукции по числу $n = \dim E^n$. Случай $n = 1$ тривиален. Предположим, что теорема 1 верна для пространств размерности, меньшей n , и докажем ее для пространства E^n . Пусть a — некоторое ребро многогранника $M^n \subset E^n$, а l — направление в E^n , параллельное ребру a .

Обозначим через N_a объединение всех лучей, имеющих направление l и начинающихся в точках множества M^n . Тогда N_a представляет собой неограниченный многогранник в E^n , вписанный конус ⁽¹³⁾ которого есть луч, имеющий направление l , причем N_a является почти коническим ⁽¹³⁾ выпуклым телом в E^n . Аналогично, меняя направление l на противоположное ему направление l' , построим неограниченный многогранник N_a' в E^n . Проекция каждого из многогранников N_a, N_a' вдоль направления ребра a на гиперплоскость E^{n-1} , не параллельную a , совпадает с проекцией многогранника M^n , т. е. представляет многогранник $M^{n-1} \subset E^{n-1}$, который так же, как и M^n , обладает свойством, что все его грани центрально-симметричны. Следовательно, по предположению индукции, $c(M^{n-1}) \leq 2^{n-1}$. Из результатов работы ⁽¹³⁾ теперь непосредственно следует, что $c(N_a) = c(N_a') = c(M^{n-1}) \leq 2^{n-1}$.

Далее, так как, очевидно, $N_a \cap N_a' = M^n$, $\text{bd } N_a \cap \text{bd } N_a' = \text{bd } M^n$, причем каждая вершина многогранника M^n является вершиной одного и только одного многогранника N_a, N_a' , то $c(M^n) \leq c(N_a) + c(N_a') \leq 2^n$.

Соотношение $c(M^n) \geq n - 1$ установлено в ⁽²⁾. Таким образом, неравенства (1) доказаны.

Далее, из проведенного рассуждения видно, что равенство $c(M^n) = 2^n$ может иметь место только в том случае, если проекция многогранника $M^n \subset E^n$ вдоль любого его ребра есть $(n - 1)$ -мерный параллелепипед. Легко показать, что этим свойством обладают только n -мерные параллелепипеды. Этим и завершается доказательство теоремы 1.

Доказательство теоремы 2. Предварительно введем некоторые понятия. Многогранник $K \subset E^n$ мы будем называть редуцированным, если он обладает следующими свойствами:

1°. Никакая $(n - 1)$ -мерная грань не освещается одним направлением.

2°. Для любой прямой $l \subset E^n$ либо существует опорная прямая p многогранника K (т. е. $p \cap \text{bd } K \neq \emptyset$, $p \cap \text{int } K = \emptyset$), параллельная l и имеющая с $\text{bd } K$ единственную общую точку, либо же K представляет призму, образующие которой параллельны l .

Пусть теперь K — многогранник, удовлетворяющий условию 1°, но не удовлетворяющий условию 2°. Тогда существует такая прямая $l \subset E^n$, что всякая опорная прямая p многогранника K , параллельная l , имеет с $\text{bd } K$ общий отрезок. Обозначим через m минимум длин отрезков, отсекаемых из $\text{bd } K$ опорными прямыми многогранника K , параллельными l . Далее, произведем параллельный перенос τ многогранника K параллельно прямой l (в любом направлении) на расстояние m . Так как K не является призмой с образующими, параллельными l , то $K^* = K \cap \tau(K)$ есть снова n -мерный многогранник, причем ясно, что $c(K^*) \geq c(K)$. Заметим, что K^* снова удовлетворяет условию 1°, причем у K^* не больше $(n - 1)$ -мерных граней, чем у K , а число ребер у K^* меньше, чем у K .

Так как число граней и ребер у любого многогранника $K \subset E^n$ конечно, то повторное применение описанного приема приведет нас после конечного числа шагов к редуцированному многограннику K_r , причем $c(K) \leq c(K_r)$. Отсюда ясно, что теореме 2 достаточно доказать для редуцированных многогранников.

Лемма 1. Пусть K_r — редуцированный центрально-симметричный многогранник в E^n .

Тогда для любой его грани F найдется такая грань F' , которая имеет непустое пересечение как с гранью F , так и с симметричной ей относительно центра многогранника K_r гранью $\bar{F}$.

Доказательство. Основой доказательства является установление следующего факта: для любой двумерной грани F многогранника K_r найдутся такие три опорные плоскости H_1, H_2, H_3 многогранника K_r , что полупространства, определяемые ими и не содержащие K_r , имеют пустое пересечение и при этом $H_j \cap F \neq \emptyset, j = 1, 2, 3$. Отмеченный факт легко переносится с заменой числа 3 числом n на любую $(n - 1)$ -мерную грань F произвольного редуцированного многогранника $K_r \subset E^n$.

Пусть F — некоторая грань редуцированного многогранника $K_r \subset E^3$. Окружением грани F называется множество всех (замкнутых) граней многогранника K_r , имеющих с F непустое пересечение. С помощью леммы 1 доказывается

Лемма 2. Любой редуцированный многогранник $K_r \subset E^3$ обладает следующим свойством: либо имеются две симметричные вершины, окружения которых содержат все вершины многогранника, либо имеются две симметричные грани, окружения которых содержат все грани многогранника.

Лемма 3. Для любого отличного от параллелепипеда редуцированного многогранника K_r пространства E^3 справедливы неравенства

$$4 \leq c(K_r) \leq 6.$$

Доказательство основано на следующих соображениях. Обозначим через P^2 двумерное проективное пространство, точками и прямыми которого являются прямые и плоскости пространства E^3 , проходящие через центр симметрии многогранника K_r . Далее, пусть $c'(K_r)$ — минимальное число прямых пространства E^3 , обладающих тем свойством, что для любой точки $x \in \text{bd } K_r$ существует проходящая через x прямая, параллельная некоторому из них и пересекающаяся с $\text{int } K_r$. Ясно, что $c(K_r) \leq 2c'(K_r)$: достаточно для каждой из выбранных прямых взять два противоположных направления, параллельных этой прямой.

Рассмотрим теперь двойственный для K_r многогранник K_r^d . На плоскости P^2 этот многогранник K_r^d реализует некоторое разбиение $\mathcal{K}_r^d$, состоящее из выпуклых (в проективном смысле ⁽¹⁾) многоугольников, соответствующих парам симметричных одна другой граней многогранника K_r^d . Для любых различных многоугольников $M_1, M_2 \in \mathcal{K}_r^d$ пересечение $M_1 \cap M_2$ либо пусто, либо состоит из вершин (узлов) и целых ребер. Из соображений двойственности числу $c'(K_r)$ соответствует равное ему число $c_d'(\mathcal{K}_r^d)$ таких прямых на плоскости P^2 , что для любого $M \in \mathcal{K}_r^d$ найдется среди них прямая, не пересекающая M . Теперь на основе леммы 3 получаем, что $\mathcal{K}_r^d$ либо содержит многоугольник, к границе которого примыкают все остальные элементы разбиения $\mathcal{K}_r^d$ (случай существования двух симметричных вершин, окружения которых содержат все вершины многогранника K_r), либо содержит такой узел, что примыкающие к нему многоугольники содержат все остальные вершины разбиения $\mathcal{K}$ (случай существования двух симметричных граней, окружения которых содержат все вершины многогранника K_r). Простые комбинаторные рассуждения показывают, что если K_r не является параллелепипедом, то, как и в первом, так и во втором случае, число $c_r'(\mathcal{K}_r^d)$ в точности равно 3. Для завершения доказательства леммы 3 остается заметить, что $c(K_r) \geq 4$, см. ⁽²⁾.

Из лемм 2, 3 и теоремы 1 следует теорема 2.

Замечание. В связи с изложенными проективными рассмотрениями естественно возникает следующая задача. Пусть P^n — действительное n -мерное проективное пространство, а $\mathcal{K} = \{M\}$ — конечная совокупность выпуклых (в проективном смысле) многогранников, образующих так называемое нормальное разбиение (т. е. $\bigcup_{M \in \mathcal{K}} M = P^n$ и пересечение любых

двух различных многогранников $M_1, M_2 \in \mathcal{K}$ либо пусто, либо состоит из целых граней этих многогранников, вообще говоря, различных размерностей). В пространстве P^n ищется минимальное число $h(\mathcal{K})$ гиперплоскостей.

обладающих тем свойством, что для любого $M \in \mathcal{K}$ существует среди этих гиперплоскостей такая, которая не пересекает M .

Гипотеза. Число $h(\mathcal{K})$ удовлетворяет неравенствам

$$n + 1 \leq h(\mathcal{K}) \leq 2^n,$$

причем $h(\mathcal{K}) = 2^n$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{K}$ состоит из $n + 1$ экземпляров n -мерного симплекса.

(Неравенство $h(\mathcal{K}) \geq n + 1$ устанавливается без труда.) Подтверждение этой гипотезы для $n \geq 2$, очевидно, даст существенную информацию в пользу достоверности гипотезы Хадвигера.

Кишиневский государственный университет
им. В. И. Ленина

Поступило
4 VI 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Н. Hadwiger, *Ungelöste Probleme*, № 20, *Elem. der Math.*, **12**, 121 (1957).
- ² И. Ц. Гохберг, А. С. Маркус, *Изв. Молд. фил. АН СССР*, № 10 (76), 87 (1960).
- ³ В. Г. Болтянский, *Изв. Молд. фил. АН СССР*, № 10 (76), 77 (1960). ⁴ В. Г. Болтянский, И. Ц. Гохберг, *Теоремы и задачи комбинаторной геометрии*, «Наука», 1965. ⁵ B. Grünbaum, *Pacific J. Math.*, № 11, 215 (1961). ⁶ B. Grünbaum, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **15**, 161 (1964). ⁷ Л. Данцер, Б. Грюнбаум, В. Кли, *Теорема Хелли*, 1968. ⁸ L. Danzer, B. Grünbaum, *Math. Zs.*, **79**, 95 (1962). ⁹ F. W. Lewi, *Arch. Math.*, **6**, 369 (1955). ¹⁰ П. С. Солтан, *Освещение границы выпуклого тела изнутри*, Матем. сборн., Нов. сер., **57** (99), 433 (1962). ¹¹ П. С. Солтан, *ДАН*, **194**, № 2 (1970). ¹² П. С. Солтан, *Уч. зап. Кишиневск. гос. унив.*, **82**, 69 (1965). ¹³ П. С. Солтан, *Изв. АН МССР*, № 1, 49 (1963). ¹⁴ П. С. Солтан, *Об освещении неограниченных выпуклых тел*, Матем. исслед., АН МССР, 1970, стр. 128.