Доклады Академии наук СССР
1972. Том 202, № 3

УДК 517.5 *МАТЕМАТИКА*

М. Д. СТЕРЛИН

ТОЧНЫЕ ПОСТОЯННЫЕ В ОБРАТНЫХ ТЕОРЕМАХ ТЕОРИИ ПРИБЛИЖЕНИЙ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 18 VI 1971)

Обратные теоремы, играющие (наряду с прямыми теоремами) основную роль в теории приближений, хорошо известны. Однако формулировки обратных теорем (см., например, ([1])) содержат константы, зависящие от фиксированных параметров. Точные значения этих констант до сих пор не были известны ни для одного случая.

Ниже приводятся обратные теоремы, в которых найдены точные значения констант. Указываются также приложения полученных результатов к проблеме эквивалентности норм.

1. Рассмотрим комплексное гильбертово пространство L^2 измеримых функций $f(x_1, \ldots, x_l)$ периода 2π по каждой переменной, квадрат модуля которых интегрируем на $[0, 2\pi]^l$,

$$\|f\|_{L^2} \overset{\text{def}}{=} \left\{\int_0^{2\pi} \ldots \int_0^{2\pi} |f(x_1, \ldots, x_l)|^2\, dx_1 \ldots dx_l\right\}^{1/2}.$$

Положим $D_{n_1, \ldots, n_m, \infty}(f) \overset{\text{def}}{=} \inf\limits_T \|f - T\|_{L^2}$, где $m \leqslant l$, а T пробегает класс всех тригонометрических полиномов порядка $\leqslant n_j$ по переменным x_j ($j = 1, \ldots, m$), имеющих коэффициентами 2π-периодические функции переменных $x_{m+1}, \ldots, x_l$, принадлежащие L^2;

$$\omega_{k_1, \ldots, k_m}(h_1, \ldots, h_m; 0, \ldots, 0; f) \overset{\text{def}}{=} \sup_{|t_j| \leqslant h_j} \|\Delta_{t_1}^{k_1} \ldots \Delta_{t_m}^{k_m} f(x_1, \ldots, x_m; x_{m+1}, \ldots, x_l)\|_{L^2}$$

(k_j — натуральные, $h_j \geqslant 0$).

Теорема 1. *Для всех* $f \in L^2$,

$$\int_0^{2\pi} \ldots \int_0^{2\pi} |f(x_1, \ldots, x_m; x_{m+1}, \ldots, x_l)|^2\, dx_{m+1} \ldots dx_l \not\equiv \text{const},$$

имеет место неравенство

$$\omega_{k_1, \ldots, k_m}\left(\frac{\pi}{n_1}, \ldots, \frac{\pi}{n_m}; 0, \ldots, 0; f\right) <$$

$$< \sqrt{2k_1}\left(\frac{\pi}{n_1}\right)^{k_1} \ldots \sqrt{2k_m}\left(\frac{\pi}{n_m}\right)^{k_m} \left\{\sum_{\nu_1=0}^{n_1} \ldots \sum_{\nu_m=1}^{n_m} \nu_1^{2k_1-1} \ldots \nu_m^{2k_m-1} E^2_{\nu_1-1, \ldots, \nu_m-1, \infty}(f)\right\}^{1/2},$$

где константа точна в следующем смысле: для любых $k_1, \ldots, k_m$ *и любого* $N < \sqrt{2k_1}\pi^{k_1} \ldots \sqrt{2k_m}\pi^{k_m}$ *существуют* $n_0 > 0$ *и* $g \in L^2$ *(даже вида* $e^{ip(x_1 + \ldots + x_m)}$, p *— целое) такие, что при всех* $n_1, \ldots, n_m > n_0$

$$\omega_{k_1, \ldots, k_m}\left(\frac{\pi}{n_1}, \ldots, \frac{\pi}{n_m}; 0, \ldots, 0; g\right) >$$

$$> \frac{N}{n_1^{k_1} \ldots n_m^{k_m}} \left\{\sum_{\nu_1=1}^{n_1} \ldots \sum_{\nu_m=1}^{n_m} \nu_1^{2k_1-1} \ldots \nu_m^{2k_m-1} E^2_{\nu_1-1, \ldots, \nu_m-1, \infty}(g)\right\}^{1/2}.$$

Для пространства $L^2(R^l)$, если $E_{n_1, \ldots, n_m, \infty}(f)$ заменить на $A_{\sigma_1, \ldots, \sigma_m, \infty}(f) \overset{\text{def}}{=} \inf\limits_Q \|f - Q\|_{L^2(R^l)}$, где Q пробегает класс всех $Q \in L^2(R^l)$, являющихся целыми функциями степени $\leqslant \sigma_j$ по переменным x_j ($j = 1, \ldots, m$), а при определении $\omega_{k_1, \ldots, k_m}$ норму брать в $L^2(R^l)$, справедлива

Теорема 2. *Для всех* $f \in L^2(R^l)$, $f \not\equiv 0$, *имеет место неравенство*

$$\omega_{k_1,\ldots,k_m}\left(\frac{\pi}{n_1},\ldots,\frac{\pi}{n_m};\ 0,\ldots,0;f\right)<$$

$$<\sqrt{2k_1}\left(\frac{\pi}{n_1}\right)^{k_1}\ldots\sqrt{2k_m}\left(\frac{\pi}{n_m}\right)^{k_m}\left\{\sum_{\nu_1=1}^{n_1}\ldots\sum_{\nu_m=1}^{n_m}\nu_1^{2k_1-1}\ldots\nu_m^{2k_m-1}A^2_{\nu_1-1,\ldots,\nu_m-1,\infty}(f)\right\}^{1/2},$$

где константа точна в следующем смысле: для любых $k_1,\ldots,k_m$ *и любого* $N<\sqrt{2k_1}\pi^{k_1}\ldots\sqrt{2k_m}\pi^{k_m}$ *существуют* $n_0>0$ *и* $g\in L^2(R^l)$ *такие, что при всех* $n_1,\ldots,n_m>n_0$ *выполняется неравенство*

$$\omega_{k_1,\ldots,k_m}\left(\frac{\pi}{n_1},\ldots,\frac{\pi}{n_m};\ 0,\ldots,0;g\right)>$$

$$>\frac{N}{n_1^{k_1}\ldots n_m^{k_m}}\left\{\sum_{\nu_1=1}^{n_1}\ldots\sum_{\nu_m=1}^{n_m}\nu_1^{2k_1-1}\ldots\nu_m^{2k_m-1}A^2_{\nu_1-1,\ldots,\nu_m-1,\infty}(g)\right\}^{1/2}.$$

2. Пусть $\rho=\{\rho_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ — последовательность положительных чисел; $p>0$; $\hat{l}^p(\rho)\overset{\mathrm{def}}{=}\left\{f\in L^1(0,2\pi)\ \Big|\ \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}|f_n|^p\rho_n<\infty\right\}$, $\|f\|_p\overset{\mathrm{def}}{=}\left\{\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}|f_n|^p\rho_n\right\}^{1/p}$, где f_n — коэффициенты Фурье функции f (при $p=2$, $\rho_n\equiv1$ получаем $L^2(0,2\pi)$ с обычной нормой). Положим $E_n(f)\overset{\mathrm{def}}{=}\inf\limits_{T_n}\|f-T_n\|_p$, где T_n пробегает класс всех тригонометрических полиномов порядка $\leqslant n$. $\omega_k(\delta,f)\overset{\mathrm{def}}{=}\sup\limits_{|t|\leqslant\delta}\|\Delta_t^kf\|_p$ (k — натуральное, $\delta\geqslant0$).

Теорема 3. *Для всех* $f\in\hat{l}^p(\rho)$, $f\not\equiv\mathrm{const}$, *выполняется неравенство*

$$\omega_k\left(\frac{\pi}{n},f\right)<\sqrt[p]{pk}\left(\frac{\pi}{n}\right)^k\left\{\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{pk-1}E^p_{\nu-1}(f)\right\}^{1/p},$$

где константа точна: для любого k *и любого* $N<\sqrt[p]{pk}\pi^k$ *найдутся* $n_0>0$ *и* $g\in\hat{l}^p(\rho)$ (*даже вида* e^{imx}, m — *целое*) *такие, что при всех* $n>n_0$

$$\omega_k\left(\frac{\pi}{n},g\right)>\frac{N}{n^k}\left\{\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{pk-1}E^p_{\nu-1}(g)\right\}^{1/p}.$$

Теорема 4. *Пусть* r (>0), k *и* p *фиксированы,* $\alpha=\alpha(n;r,k,p)\geqslant\geqslant\frac{r}{r+k}\left(\frac{2}{\pi}\right)^{pk}$ *для всех* $n>0$ (*например,* $\alpha\equiv1$).

Тогда для любого $n>0$ *и всех* $f\in\hat{l}^p(\rho)$, $f\not\equiv\mathrm{const}$, *таких, что производная в смысле Вейля* $f^{(r)}\in\hat{l}^p(\rho)$ (*последнее эквивалентно сходимости ряда* $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\nu^{pr-1}E^p_{\nu-1}(f)$), *выполняется неравенство*

$$\omega_k\left(\frac{\pi}{n},f^{(r)}\right)<\sqrt[p]{p(k+r)}\,\pi^k\left\{\frac{1}{n^{pk}}\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{p(k+r)-1}E^p_{\nu-1}(f)+\alpha\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{pr-1}E^p_{\nu-1}(f)\right\}^{1/p}.$$

Постоянная точна: для любого $N<\sqrt[p]{p(k+r)}\,\pi^k$ *существуют* $n_0>0$ *и* $g(x)=e^{imx}$ (m — *целое*) *такие, что при всех* $n>n_0$

$$\omega_k\left(\frac{\pi}{n},g^{(r)}\right)>N\left\{\frac{1}{n^{pk}}\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{p(k+r)-1}E^p_{\nu-1}(g)+\alpha\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{pr-1}E^p_{\nu-1}(g)\right\}^{1/p}.$$

Замечание 1. Если $\alpha(n;r,k,p)<\frac{r}{r+k}\left(\frac{2}{\pi}\right)^{pk}$ при некоторых n, r, k, p, то для этих n, k, p оценка из теоремы 4 не имеет места.

Замечание 2. Для $p \geqslant 1$ теорема 4 верна и в том случае, если оценку писать в виде

$$\omega_k\left(\frac{\pi}{n}, f^{(r)}\right) < \sqrt[p]{p(k+r)}\,\pi^k \left\{\frac{1}{n^k}\left[\sum_{\nu=1}^{n} \nu^{p(k+r)-1} E_{\nu-1}^p(f)\right]^{1/p} + \left[\alpha \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{pr-1} E_{\nu-1}^p(f)\right]^{1/p}\right\}.$$

3. Пусть μ — борелевская мера на оси, эквивалентная мере Лебега; $p > 0$; $\hat{L}_\mu^p \stackrel{\mathrm{def}}{=} \left\{f \in L^1(R') \int |\hat{f}|^p d\mu < \infty\right\}$, $\|f\|_p \stackrel{\mathrm{def}}{=} \left\{\int |\hat{f}|^p d\mu\right\}^{1/p}$ ($\hat{f}$ — преобразование Фурье функции f). $A_\sigma(f) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \inf\limits_{Q_\sigma} \|f - Q_\sigma\|_p$, где Q_σ пробегает класс всех целых функций степени $\leqslant \sigma$, принадлежащих $\hat{L}_\mu^p$; $\omega_k(\delta, f) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sup\limits_{|t| \leqslant \delta} \|\Delta_t^k f\|_p$ (k — натуральное, $\delta \geqslant 0$).

Теорема 5. *Для всех $f \in \hat{L}_\mu^p$, $f \not\equiv 0$, справедлива оценка*

$$\omega_k\left(\frac{\pi}{n}, f\right) < \sqrt[p]{pk}\left(\frac{\pi}{n}\right)^k \left\{\sum_{\nu=1}^{n} \nu^{pk-1} A_{\nu-1}^p(f)\right\}^{1/p},$$

где константа точная: для любого k и любого $N < \sqrt[p]{pk}\,\pi^k$ существуют $n_0 > 0$ и $g \in \hat{L}_\mu^p$ такие, что при всех $n > n_0$

$$\omega_k\left(\frac{\pi}{n}, g\right) > \frac{N}{n^k}\left\{\sum_{\nu=1}^{n} \nu^{pk-1} A_{\nu-1}^p(g)\right\}^{1/p}.$$

Аналогичная теорема справедлива и в многомерном случае. В пространствах L_μ^p верен и аналог теоремы 4. Если μ — мера Лебега, то $\hat{L}_\mu^2$ — плотное подпространство в $L^2(R^1)$, и отсюда следуют соответствующие результаты в $L^2(R^1)$.

4. Имеет место теорема, обобщающая теоремы 1—5 в терминах гармонического анализа на коммутативной локально компактной топологической группе.

5. Отметим важную особенность всех приведенных здесь обратных теорем: величины, стоящие в обеих частях оценки, имеют одинаковый порядок относительно n (известные обратные теоремы в пространстве L^p, $p \geqslant 1$, $p \neq 2$, таким свойством не обладают). Отсюда вытекает

Следствие. *Пусть $p \geqslant 1$, $p \neq 2$. Тогда L^p-норма $\|f\|_{L^p(R')} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \left\{\int\limits_{R'} |f|^p dx\right\}^{1/p}$ не эквивалентна $\|f\|_p \stackrel{\mathrm{def}}{=} \left\{\int |\hat{f}|^p d\mu\right\}^{1/p}$, какова бы ни была μ из п. 3. Не являются эквивалентными также $\|f\|_{L^p(0, 2\pi)} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \left\{\int\limits_0^{2\pi} |f|^p dx\right\}^{1/p}$ и $\|f\|_p \stackrel{\mathrm{def}}{=} \left\{\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} |f_n|^p \rho_n\right\}^{1/p}$ ни при каких ρ из п. 2.*

Результаты пунктов 2 и 3 (а значит, и это следствие) справедливы для значительно более широкого класса пространств, чем указано. Однако подробнее на этих вопросах мы здесь останавливаться не будем.

6. Результаты, аналогичные изложенным в п. 1—4, справедливы и для произвольных коэффициентов при наилучших приближениях, но точные постоянные имеют более громоздкий вид.

В заключение автор выражает глубокую благодарность Г. И. Натансону за внимание и интерес к данной работе.

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова

Поступило
12 VI 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. Ф. Тиман, Матем. сборн., **46** (88), 1, 125 (1958).