Доклады Академии наук СССР
1972. Том 202, № 3

УДК 517.948.31 *МАТЕМАТИКА*

С. В. УСПЕНСКИЙ

О ВОССТАНОВЛЕНИИ ФУНКЦИИ, ЗАДАННОЙ ИНТЕГРАЛАМИ ПО ОДНОМУ СЕМЕЙСТВУ ЭЛЛИПСОИДОВ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 21 VI 1971)

Пусть E_n — n-мерное эвклидово пространство точек $x(x_1, \ldots, x_n)$, S — единичная сфера с центром в начале координат. Введем n-параметрическое семейство эллипсоидов

$$L(\omega x) = \sum_{k=1}^{n} (\omega_k x_k)^2 = \rho, \tag{1}$$

где $\omega(\omega_1, \ldots, \omega_n) \in S$, $\rho > 0$.

В настоящей работе решается задача о восстановлении функции по заданным интегралам от нее на n-параметрическом семействе эллипсоидов вида (1), т. е. ставится задача о нахождении решения уравнения

$$Au = \int\limits_{L(\omega x)=\rho} \frac{U\, d\sigma}{|\operatorname{grad}_x L(\omega x)|} = f(\omega, \rho). \tag{2}$$

Задача об определении функции ее интегралами по некоторому семейству поверхностей (кривых) является классической в интегральной геометрии; она имеет многочисленные приложения в теории представлений групп Ли (см. ([4])), при рассмотрении обратных задач для дифференциальных уравнений (см. ([13])). Наиболее изученной является здесь задача Радона о выражении функции ее интегралами по гиперплоскостям в E_n ([1-7]). Полученные при этом результаты перенесены на случай комплексных пространств (см. ([4])). Для случая семейства сфер фиксированного радиуса и с центром, пробегающим E_n, эта задача решена в ([6]). Дальнейшие обобщения этой задачи были получены в работах ([8], [9]). Следует также отметить работы ([10-15]), где рассматривается семейство эллипсоидов вращения с фокусами, расположенными на одной из координатных плоскостей. Эти результаты были обобщены на более широкий класс поверхности и получили многочисленные приложения к различным вопросам геофизики (см., например, ([13])).

Ниже мы выделяем класс функций $\mathfrak{M}$, для которых решение задачи в случае семейства эллипсоидов вида (1) единственно, а также находим условия на функцию f (необходимые и достаточные), которые обеспечивают существование решения задачи в классе единственности $\mathfrak{M}$. При этом строится интегральное представление решения задачи (2).

Для формулировки результатов введем некоторые определения. Определим класс единственности $\mathfrak{M}$. $f \in \mathfrak{M}$, если

1) f локально суммируема на E_n и нечетна, т. е.

$$f(x_1, \ldots, -x_j, \ldots, x_n) = (-1) f(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_n), \quad j = 1, \ldots, n;$$

2) существует $\varepsilon \in (01)$ такое, что для почти всех $x \in E_n$ имеют место оценки

$$|f(x)| \leqslant K|x_i|^{-\varepsilon}, \quad |f(x)| \leqslant K|x_i|^{\varepsilon}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

где константа K не зависит от точки $x \in E_n$.

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. *Если решение уравнения* (12) *существует в классе* $\mathfrak{M}$, *то оно единственно и имеет для почти всех* $x \in E_n$ *представление*

$$U(x) = \prod_{k=1}^{n} x_k^{-1} \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} \frac{1}{v} \int_{E_n} e^{-v\rho s^2} K\left(\frac{1}{v^{\alpha} x}, s\right) f\left(\frac{s}{|s|}, \rho\right) ds\, d\rho\, dv, \qquad (3)$$

где $\alpha = {}^1/_2$,

$$K\left(\frac{x}{v^{\alpha}}, s\right) =$$

$$= \frac{1}{(4\pi)^n} \sum_{j=1}^{n} \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{4} \sum_{\nu_k=0}^{\infty} \left[\frac{ix_k}{2v^{1/2}}\right]^{2\nu_k} \frac{1}{(2\nu_k)!} \left(\frac{\partial}{\partial s_j}\frac{1}{s_j}\right)\left(\frac{\partial}{\partial s_k}\frac{1}{s_k}\right)^{\nu_k} [ls_j^2 s_k^{2\nu_k}]^{-is_k}.$$

Доказательство теоремы 1 основано на следующей лемме:

Лемма 1. *Если функция* $f(x) \in L_1(E_n) \cap L_p^{\mathrm{loc}}$, $p > 1$, *то для почти всех* $x \in E_n$ *имеет место представление*

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_0^{\infty} v^{-\frac{|n|}{2}-1} \int_{E_n} \hat{G}_1\left(\frac{t-x}{v^{1/2}}\right) f(t)\, dt\, dv,$$

где $\hat{G}_1(x)$ — *преобразование Фурье функции*

$$G_1(x) = L(x)\exp(-L(x)).$$

Определим оператор T:

$$TU = \prod_{k=1}^{n} x_k^{-1} \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ w\to\infty}} \int_{\varepsilon}^{w} v^{-1} \int_0^{\infty} \int_{E_n} K\left(\frac{1}{xv^{1/2}}, s\right) e^{-v|s|^2\rho} U\left(\frac{s}{|s|}, \rho\right) ds\, d\rho\, dv. \qquad (4)$$

Обозначим через $\mathfrak{M}^*$ множество функций, на которых оператор T определен ($Tv \in L_1^{\mathrm{loc}}(E_n)$) и $Tv \in \mathfrak{M}$. В силу аддитивности и однородности оператора T множество $\mathfrak{M}^*$ является линейной системой. Факторизуем $\mathfrak{M}^*$ по множеству нулей оператора T. Полученное множество классов смежности обозначим через $\{S\}$.

Лемма 2. *В каждом классе смежности* S *существует единственный элемент* f, *являющийся неподвижной точкой оператора* AT.

Доказательство. Пусть S_1 — произвольный класс смежности, а f_1 — произвольный его элемент. Поскольку $Tf \in \mathfrak{M}$, то $ATf \in L_1^{\mathrm{loc}}$. Положим $f = ATf_1$. Тогда Tf_1 есть решение $Au = f$, принадлежащее классу $\mathfrak{M}$ и, следовательно, из теоремы 1 вытекает, что f принадлежит области определения D_T оператора T и

$$Tf_1 = Tf \quad \text{или} \quad T(f_1 - f) = 0, \qquad (5)$$

т. е. $f \in S_1$.

Учитывая (5), имеем

$$ATf = ATf_1 = f.$$

Допустим, что существует еще элемент $g \in S_1$, удовлетворяющий условию

$$ATg = g.$$

Поскольку $f, g \in S_1$, то $T(f - g) = Tf - Tg = 0$. Отсюда

$$f = ATf = ATg = g.$$

Лемма доказана полностью.

Выделим из каждого класса смежности элемент, удовлетворяющий условиям леммы 2. Полученное множество обозначим через $\mathfrak{M}_1$. Очевидно множество $\mathfrak{M}_1$ является линейной системой.

Имеет место

Теорема 2. *Оператор A осуществляет изоморфное отображение множества $\mathfrak{M}$ на $\mathfrak{M}_1$.*

Доказательство. Рассмотрим множество

$$\mathfrak{M}_1^* = \{AU\}, \qquad U \in \mathfrak{M}.$$

Очевидно, достаточно доказать, что $\mathfrak{M}_1^* = \mathfrak{M}_1$. Пусть $f \in \mathfrak{M}_1^*$, тогда существует $U_1 \in \mathfrak{M}$, $AU_1 = f$, и, следовательно, из теоремы 1 имеем

$$U_1 = Tf.$$

Так как $U_1 \in \mathfrak{M}$, то $f \in \mathfrak{M}^*$ и принадлежит некоторому классу смежности S. Поскольку $f = AU_1 = ATf$, то $f \in \mathfrak{M}_1$, т. е. $\mathfrak{M}_1^* \subset \mathfrak{M}_1$.

Пусть $f \in \mathfrak{M}_1$. Положим

$$U = Tf.$$

Тогда $U \in \mathfrak{M}$ и, следовательно, принадлежит D_A. Имеем

$$AU = ATf = f,$$

т. е. $f \in \mathfrak{M}_1^*$.

Институт математики
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
14 V 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] J. Radon, Ber. verh. Sächs. Acad., **69**, 262 (1917). [2] F. John, Math. Ann., **109**, 488 (1934). [3] F. John, Math. Ann., **111**, 541 (1935). [4] И. М. Гельфанд, М. И. Граев, Н. Я. Виленкин, Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений, М., 1962. [5] П. О. Костелянец, Ю. Г. Решетняк, УМН, **9**, в. 3 (61), 135 (1954). [6] Ф. Йон, Плоские волны и сферические средние в применении к дифференциальным уравнениям с частными производными, ИЛ, 1958. [7] В. И. Семянистый, ДАН, **134**, № 3, 536 (1960). [8] Г. И. Плаксин, ДАН, **170**, № 4, 783 (1966). [9] Г. И. Плаксин, ДАН, **166**, № 3, 548 (1966). [10] М. М. Лаврентьев, В. Г. Романов, ДАН, **171**, № 6, 1279 (1966). [11] В. Г. Романов, ДАН, **173**, № 4, 766 (1967). [12] В. Г. Романов, ДАН, **181**, № 3, 554 (1968). [13] М. М. Лаврентьев, В. Г. Романов, В. Г. Васильев, Многомерные обратные задачи для дифференциальных уравнений, «Наука», 1969. [14] В. Г. Романов, Сибирск. матем. журн., **10**, № 6, 1364 (1969). [15] Р. Курант, Уравнения с частными производными, М., 1964.