Доклады Академии наук СССР
1972. Том 202, № 3

УДК 513 *МАТЕМАТИКА*

Член-корреспондент АН СССР Д. К. ФАДДЕЕВ

О МЕРЕ МНОЖЕСТВА СЕРЕДИН ХОРД ПЛОСКОГО КОНТИНУУМА

Цель настоящей заметки состоит в доказательстве следующей теоремы.

Теорема. *Пусть M — ограниченное связное замкнутое множество точек на плоскости, T — его выпуклая оболочка и P — множество середин отрезков, соединяющих пары точек M.*

Тогда $\operatorname{mes} P \geqslant {}^1/_2\,(\operatorname{mes} T + \operatorname{mes} M)$.

Доказательству теоремы предпошлем три леммы.

Лемма 1. *Если C — внутренняя точка ограниченной связной области D на плоскости, то C есть середина отрезка, связывающего некоторые две точки границы области D.*

Для доказательства достаточно рассмотреть область D', симметричную D относительно точки C, и взять отрезок, соединяющий пару симметричных точек пересечения границ областей D и D'.

Лемма 2. *Пусть L — кривая на плоскости, исходящая из точки A в точку B, не имеющая самопересечений и не пересекающаяся с прямолинейным отрезком AB. Пусть точка C лежит внутри области D, ограниченной кривой L и отрезком AB, а точки A' и B', симметричные точкам A и B относительно C, не принадлежат области D.*

Тогда C есть середина отрезка, связывающего некоторую пару точек, лежащих на L.

Достаточно установить, что L пересекается с симметричной относительно C кривой L'. Мы это сделаем в предположении, что L состоит из конечного числа прямолинейных отрезков. Это ограничение легко снимается, но для наших целей в этом нет необходимости.

Если отрезок $A'B'$ не пересекается с линией L, так что все точки этого отрезка — внешние для области D, то утверждение очевидно — границы областей D и D' пересекаются, $A'B'$ не пересекается ни с AB, ни с L, а L' не пересекается с AB, следовательно, L' пересекается с L.

Допустим, что на отрезке $A'B'$ имеются только внешние и граничные точки для области D. Обозначим через L_0 часть ломаной L, состоящую из звеньев, не лежащих на отрезке $A'B'$. L_0 состоит из нескольких связных кусков. Обозначим их $L_1, \ldots, L_m$, выбрав нумерацию в порядке обхода области D против часовой стрелки. Будем считать, что L_1 начинается в точке B, L_m кончается в A, так что положительным направлением для отрезка AB является от A к B. Для области D' положительным считаем тоже направление против часовой стрелки, так что для отрезка $A'B'$ положительным направлением будет от A' к B'.

Пусть L_i подходит к отрезку $A'B'$ с внешней для области D' стороны. Тогда следующее за L_i звено, идущее по отрезку $A'B'$ (если оно есть), направлено в отрицательном направлении, так как в противном случае примыкающий к концу L_i участок отрезка $A'B'$ в отрицательном направлении находился бы налево от рассматриваемого участка границы области D и его достаточно малая часть лежала бы внутри D, что противоречит условию. По той же причине, если L_{i+1} следует за отрезком границы, следующим по отрезку $A'B'$ в отрицательном направлении, то L_{i+1} отходит во внешнюю для области D' сторону. Далее, если L_{i+1} следует за L_i непосредственно и L_i подходит к $A'B'$ с внешней стороны для D', то L_{i+1} отходит тоже во внешнюю сторону.

Допустим, что ни одна из открытых ломаных $L_1, \ldots, L_m$ не пересекается с ломаными $L_1', \ldots, L_m'$. Тогда $L_1, \ldots, L_m$ не имеют внутренних точек пересечения со всем контуром области D'. Начало L_1 есть внешняя точка для D', поэтому и вся внутренность L_1 состоит из внешних точек для D'. Но тогда и L_2 отходит во внешнюю сторону для D', так что L_2, кроме концов, состоит из внешних точек и т. д. Отрезок AB имеет только внешние и граничные точки для D', так что весь контур области D состоит из внешних и граничных точек для D'. Следовательно, D и D' только соприкасаются по части границы и не имеют общих внутренних точек, что противоречит условию $C \in D$. Таким образом, L_0 и L_0' имеют по крайней мере одну точку пересечения, внутреннюю для обеих пересекающихся ломаных L_i и L_j'.

Пусть теперь на отрезке $A'B'$ имеются внешние и внутренние точки области D. Тогда отрезок $A'B'$ разбивает D на несколько связных компонент, из которых одна — D_0 — примыкает к отрезку AB. Если эта компонента содержит точку C, то к ней можно применить предыдущие рассуждения, так что L_0 и L_0' (определенные для этой компоненты) имеют точку пересечения, а следовательно, L и L' тоже. Если же точка C содержится в какой-либо другой компоненте, то ее граница имеет общую точку с границей симметричной области и эта общая точка не принадлежит ни отрезку AB, ни отрезку $A'B'$ и, следовательно, принадлежит L и L'.

Тем самым лемма доказана.

Лемма 3. *Множество точек C, удовлетворяющих условию леммы 2, имеет меру, не меньшую половины меры области D.*

Действительно, любая точка области D, не принадлежащая объединению областей D_1 и D_2, получающихся гомотетичным стягиванием с коэффициентом $1/2$ области D к точкам A и B, удовлетворяет условию леммы 2.

Теперь теорема легко доказывается. Без нарушения общности можно считать, что множество M есть объединение конечного числа замкнутых квадратов — достаточно заменить M конечным покрытием M_ε столь малыми квадратами, что меры множеств M_ε, P_ε и T_ε отличаются от мер M, P и T меньше, чем на ε. Из справедливости неравенства $\operatorname{mes} P_\varepsilon \geqslant 1/2(\operatorname{mes} M_\varepsilon + \operatorname{mes} T_\varepsilon)$ при сколь угодно малом ε следует, что $\operatorname{mes} P \geqslant 1/2(\operatorname{mes} M + \operatorname{mes} T)$. Итак, будем считать, что M есть замыкание связной области, ограниченной конечным числом ломаных.

Рассмотрим открытое множество $T_0 \setminus M$, где T_0 — внутренняя часть T. Оно состоит из компонент двух сортов — внутренних лакун, ограниченных замкнутыми ломаными, составляющими часть границы M, и лакун внешних, примыкающих к прямолинейным отрезкам, входящим в границу T и не имеющим с M общих точек, кроме концов. Внутренние лакуны целиком заполняются серединами хорд, опирающихся на их границы, в силу леммы 1. Внешние заполняются не менее чем на половину серединами отрезков, опирающихся на часть границы лакуны, принадлежащей M, в силу леммы 3. Тем самым, теорема доказана.

Естественно предположить, что теорема допускает обобщение:

Пусть M — связное ограниченное замкнутое множество в n-мерном эвклидовом пространстве, T — его выпуклая оболочка и P — множество центров тяжести систем из N точек множества M (с равными весами). Тогда при $N \geqslant n$ $\operatorname{mes} P \geqslant C_{N,n} \operatorname{mes} T$ при некоторой константе $C_{N,n}$.

Можно ожидать, что $C_{N,n} = N(N-1)\ldots(N-n+1)/N^n$. Неравенство с такой константой реализуется, если в качестве M взять фигуру, состоящую из n линейно независимых векторов с общим началом.

Ленинградское отделение
Математического института им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступило
8 IX 1971