

Ф. Х. ЦЕЛЬМАН

О «РЕЗОНАНСЕ» В ЗАДАЧЕ О МАЛЫХ КОЛЕБАНИЯХ СФЕРИЧЕСКОГО МАЯТНИКА

(Представлено академиком А. Ю. Ишлинским 4 VI 1971)

Хотя задача о движении сферического маятника является одной из немногих интегрируемых задач динамики, при переходе к изучению малых колебаний сферического маятника нередко совершались ошибки, приводящие к качественно неправильному описанию движения (см., например, ⁽¹⁾). В работах А. Н. Крылова ^(2, 3) для решения рассматриваемой задачи был применен метод последовательных приближений. Выкладки, приведенные в этих работах, показывают, что источник трудности анализа рассматриваемой системы лежит, по-видимому, в «резонансной» природе этой задачи.

Известно, что решение задачи * обладает свойством, что в проекции на горизонтальную плоскость изображающая точка движется по эллипсу, который при этом поворачивается. В данной заметке поворот эллипса связывается с «перекачкой энергии» в системе нелинейно связанных резонирующих осцилляторов ⁽⁴⁻⁶⁾. Автор выражает глубокую благодарность М. Г. Крейну, указавшему автору на возможность такой связи.

Рассмотрим сферический маятник, т. е. точку, движущуюся по поверхности сферы радиуса l , центр которой совпадает с началом прямоугольной системы координат $Oxyz$, причем ось Oz направлена вертикально вниз.

Уравнения движения в проекции на плоскость Oxy могут быть, с точностью до членов выше третьего порядка, записаны в виде

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = \alpha x(x^2 + y^2), \quad \frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y = \alpha y(x^2 + y^2), \quad (1)$$

где $\omega^2 = (2h + 3gl)/l^2$, $\alpha = 3g/(2l^3)$, g — постоянная силы тяжести, h — константа, фигурирующая в интеграле энергии,

$$v^2 - 2gz = 2h. \quad (2)$$

Уравнения (1) можно рассматривать как уравнения, описывающие систему двух нелинейно связанных осцилляторов с одинаковой частотой.

Гамильтониан системы (1)

$$H = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) - \frac{\alpha}{4}(x^2 + y^2)^2, \quad (3)$$

где p_x, p_y — импульсы, каноническим преобразованием

$$x \rightarrow \xi_1, \quad y \rightarrow \xi_2, \quad p_x \rightarrow \eta_1, \quad p_y \rightarrow \eta_2$$

с последующим переходом к каноническим полярным координатам

$$\xi_i = \sqrt{2\rho_i} \sin \varphi_i, \quad \eta_i = \sqrt{2\rho_i} \cos \varphi_i \quad (i = 1, 2)$$

может быть приведен к «нормальной форме» ⁽⁷⁾, имеющей следующий вид (с точностью до членов выше рассматриваемого порядка):

$$\Gamma = \omega(\rho_1 + \rho_2) + \alpha_1[3\rho_1^2 + 3\rho_2^2 + 4\rho_1\rho_2 + 2\rho_1\rho_2 \cos 2(\varphi_1 - \varphi_2)], \quad (4)$$

где $\alpha_1 = -\alpha/(8\omega^2)$.

* Как стало недавно известно автору, подобная же задача была поставлена акад. А. Ю. Ишлинским на семинаре по теории колебаний в МГУ им. М. В. Ломоносова после доклада А. Д. Брюпо о «нормальных формах» нелинейных колебаний.

Система с гамильтонианом (4) имеет интегралы

$$I = \rho_1 + \rho_2; \quad (5)$$

$$F = 3\rho_1^2 + 3\rho_2^2 + 4\rho_1\rho_2 + 2\rho_1\rho_2 \cos 2(\varphi_1 - \varphi_2). \quad (6)$$

Уравнение для ρ_1 после элементарных выкладок принимает вид

$$\frac{d\rho_1}{dt} = \pm \frac{\alpha}{4\omega^2} \sqrt{(3I^2 - F)(F - \tilde{F}(\rho_1))}, \quad (7)$$

$$\tilde{F}(\rho_1) = 4\rho_1^2 - 4\rho_1 I + 3I^2.$$

Исследование этого уравнения* (при фиксированном значении интеграла I и изменяющихся значениях интеграла F) показывает, что общим случаем является периодическое изменение ρ_1 : на «фазовой» плоскости (ρ_1, ρ_2) имеем циклы с центром в особой точке $(\rho_1 = 0, \rho_2 = 1/2)$. Если учесть, что в первом приближении ρ_i соответствует энергии i -го осциллятора, что можно говорить о «перекачке энергии» в системе нелинейно связанных осцилляторов⁽⁴⁻⁶⁾. В задаче о малых колебаниях сферического маятника это соответствует «повороту эллипса».

При $F = 3I^2$ весь отрезок $(\rho_1 = 0, 0 \leq \rho_1 \leq I)$ состоит из неподвижных точек; при $F = 2I^2$ имеется особая точка $(\rho_1 = 0, \rho_2 = 1/2)$. В задаче о малых колебаниях сферического маятника эти случаи реализуются соответственно при движениях по дуге большого круга, проходящего через «южный» полюс, и при движении точки по окружности (в проекции на Oxy).

Автор выражает глубокую благодарность В. В. Румянцеву и Л. Г. Хазину за внимание к работе.

Институт проблем управления
(автоматики и телемеханики)
Москва

Поступило
8 IV 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ А. Вебстер, Механика материальных точек, твердых, упругих и жидких тел, 1933. ² А. Н. Крылов, Две заметки по механике, ЖРФХО, 60 (1928). ³ А. Н. Крылов, Лекции о приближенных вычислениях, Изд. АН СССР, 1933. ⁴ А. Витт, Г. Горелик, ЖТФ, 3, в. 2—3 (1933). ⁵ Л. Г. Хазин, Ф. Х. Цельман, ДАН, 193, № 2 (1970). ⁶ Ф. Х. Цельман, ПММ, 34, в. 5 (1970). ⁷ J. Moser, Lectures on Hamiltonian Systems. Memoires of the Am. Math. Soc., 81 (1968).

* Которое легко интегрируется при фиксированных значениях I и F .