Доклады Академии наук СССР
1971. Том 201, № 2

УДК 533.98+537.312.62 *ЭЛЕКТРОТЕХНИКА*

Ю. Ю. АБРАМОВ, А. А. ВЕДЕНОВ, Ю. А. ДРЕЙЗИН

ВИХРЕВЫЕ ПОТЕРИ ПРИ РАЗРЯДЕ МНОГОСЛОЙНОЙ КАТУШКИ

(Представлено академиком М. А. Леонтовичем 29 IV 1971)

При изучении переходных процессов в электрических цепях могут быть случаи, когда существен учет неравномерного распределения тока по сечению проводников (вихревых токов). В этих случаях неприменимо обычное приближение, оперирующее лишь с полным током, текущим по проводнику, и необходимо более детальное рассмотрение. Такая задача встает, например, при нахождении джоулевых потерь при разряде магнитного накопителя энергии на внешнее сопротивление R ([1]); накопитель представляет собой обычно индуктивную катушку с многослойной обмоткой. Как показано ниже, в многослойной катушке учет вихревых токов необходим даже на сравнительно низких частотах, когда скиновая глубина $\delta = \sqrt{c^2/(2\pi\sigma\omega)}$ много больше толщины провода r.

Прежде чем переходить к задаче о разряде, рассмотрим кратко вопрос о потерях в многослойной катушке на переменном токе, ограничившись случаем $\delta \gg r$; при этом задачу можно решать последовательными приближениями по $(r/\delta)^2$. В нулевом приближении ток распределен по сечению равномерно. Плотность тока первого приближения $\mathbf{j}_1$ легко найти, предположив, что магнитное поле $\mathbf{H}$ перпендикулярно проводу и однородно на расстояниях порядка r (эти предположения в многослойной катушке выполняются с точностью до членов $\sim 1/N$, где $N \gg 1$ — число слоев): $j_1 = \frac{\omega\sigma}{c} Hx$, где x — расстояние, отсчитываемое от прямой, проходящей через центр тяжести сечения провода параллельно магнитному полю. Сравнивая j_1 с плотностью тока нулевого приближения $j_0 \sim I^2/r^2$, получим

$$\frac{j_1}{j_0} \sim \frac{\omega\sigma}{c} r^3 \frac{H}{I} \sim \left(\frac{r}{\delta}\right)^2 \frac{Hcr}{I}.$$

При $H \gg I/(cr)$ может быть $j_1/j_0 \gg 1$ даже при $(r/\delta)^2 \ll 1$. Легко убедиться, однако, что последующие приближения убывают как $(r/\delta)^{2n}$ и их можно не учитывать. Таким образом, в ряду теории возмущений для j первый член может быть велик по сравнению с нулевым, тогда как последующие убывают. Причина этого состоит в том, что, поскольку во всех приближениях, кроме нулевого, полный ток по сечению равен нулю, магнитное поле следующих приближений вблизи каждого участка провода определяется лишь соседними проводниками; в нулевом же приближении магнитное поле создается в основном далекими проводниками и велико вместе с N. Для мощности джоулевых потерь в катушке получим

$$W = \frac{1}{2}\left(R_k I^2 + \frac{\omega^2\sigma}{c^2} \oint \mathbf{H}^2 J_H dl\right), \tag{1}$$

где R_k — сопротивление катушки, J_H — момент инерции сечения провода относительно оси, параллельной магнитному полю; интегрирование ведется по длине провода катушки.

Перейдем теперь к решению задачи о разряде. Исключая из квазистационарных уравнений Максвелла электрическое поле $\mathbf{E}$, получим уравнения для $\mathbf{H}$

$$\begin{aligned} &\operatorname{rot}\mathbf{H} = 0 \qquad \text{вне проводников,} \\ &\Delta\mathbf{H} = \frac{4\pi\sigma}{c^2}\dot{H} \qquad \text{в проводниках,} \\ &\operatorname{div}\mathbf{H} = 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Систему (2) нужно дополнить граничными условиями, которыми являются непрерывность **H** на поверхностях раздела, а также условие, следующее из непрерывности тангенциальных компонент **E**:

$$\left.\frac{(\mathrm{rot}\,\mathbf{H})_\Gamma}{\sigma}\right|_1 = \left.\frac{(\mathrm{rot}\,\mathbf{H})_\Gamma}{\sigma}\right|_2.$$

Последнее, однако, нельзя записать на границе проводника с диэлектриком. В связи с этим возникает вопрос о достаточности этих граничных условий. Несложное исследование показывает, что для неодносвязных тел (какими являются электрические цепи) нужны дополнительные граничные условия. В случае двусвязного тела (катушка, разряжающаяся на сопротивление) в качестве добавочного граничного условия можно взять

$$\oint_\Gamma \frac{c\,\mathrm{rot}\,H}{4\pi\sigma}\,d\mathbf{l} = -\frac{1}{c}\int_S \dot{\mathbf{H}}\,d\mathbf{S}, \tag{3}$$

где Γ — контур, проходящий в металле (и такой, что его нельзя стянуть в точку, оставаясь внутри металла), S — натянутая на Γ поверхность. Удобнее, однако, вместо (3) использовать уравнение баланса энергии (заметим, что для односвязных тел оно следует из (2)):

$$\frac{d}{dt}\int \frac{\mathbf{H}^2}{8\pi}\,dV = -\int_V \frac{c^2\,(\mathrm{rot}\,\mathbf{H})^2}{(4\pi)^2\,\sigma}\,dV, \tag{4}$$

где интегрирование справа ведется по объему проводника V.

Как известно ([2]), систему (2) удобно решать с помощью разложения по собственным функциям (модам)

$$\mathbf{H}(\mathbf{r},t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{H}_n(\mathbf{r})\,e^{-\gamma_n t}, \tag{5}$$

$$\mathbf{j}(\mathbf{r},t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{j}_n(\mathbf{r})\,e^{-\gamma_n t}, \tag{6}$$

а функции удовлетворяют уравнениям и граничным условиям, следующим из (2), (4), причем различные моды ортогональны (для тока — с весом $1/\sigma$). Функции $\mathbf{H}_n$ и $\mathbf{j}_n$ можно находить, в принципе, решая сначала уравнения (2) при произвольном γ, а затем находя γ из условия (4). Ограничимся случаем, когда внешнее сопротивление R не слишком велико, так что самой медленной (нулевой) моде соответствует условие $\delta \gg r$ ($\delta = \sqrt{c^2/(2\pi\sigma\gamma)}$). При этом, по аналогии со случаем переменного тока, эту моду можно находить по теории возмущений, причем для мощности диссипации в этой моде остается справедливой формула (1) (с заменой ω на γ и без множителя $^1/_2$). Для γ_0 получим из (4) с учетом (1)

$$\gamma_0 \int \frac{\mathbf{H}_0^2}{8\pi}\,dV = I_0^2(R + R_k) + \frac{\gamma_0^2\sigma}{c^2}\int \mathbf{H}_0^2 J_H\,dl, \tag{7}$$

где I_0 — полный ток в нулевой моде. Поле **H** слабо меняется из-за наличия в j_0 вихревых токов, поэтому левую часть (7) можно заменить на $\gamma_0 L I_0^2$, где L — самоиндукция катушки. Последний член справа в (8) может быть оценен как

$$\frac{\gamma_0^2\sigma r^2}{c^2}\int_V \mathbf{H}_0^2\,dV \sim \frac{\gamma_0^2\sigma r^2}{c^2}\,\frac{L_1 I_0^2}{c^2},$$

где L_1 — внутренняя самоиндукция катушки, поэтому (7) можно переписать в виде

$$\gamma_0 \frac{LI_0^2}{c^2} = (R + R_k) I_0^2 + I_0^2 \gamma_0 \left(\frac{r}{\delta}\right)^2 \frac{L_1}{c^2}.$$

При $r / \delta \ll 1$ и $L_1 \lesssim L$ последним членом здесь можно пренебречь, и мы получаем обычную формулу

$$\gamma_0 = c^2 (R + R_{к}) / L.$$

Для того чтобы найти потери в катушке за время разряда, необходимо также найти вклад от высших мод. Непосредственно рассчитать его трудно, так как для высших мод $r / \delta \gtrsim 1$, и теория возмущений неприменима. Можно, однако, оценить этот вклад сверху.

Для этого умножим (6) (при $t = 0$) на $\mathbf{j}_0 / \sigma$ и проинтегрируем по проводникам; получим

$$\int\limits_V \frac{\mathbf{j}\mathbf{j}_0}{\sigma} dV = \int\limits_V \frac{\mathbf{j}_0^2}{\sigma} dV.$$

Оба интеграла можно выразить через величину начального тока I и величину полного тока I_0 в нулевой моде; при этом левая часть равна просто $II_0(R + R_{к})$, а правая $I_0^2(R + R_{к} + R_{в})$, где мы ввели «вихревое сопротивление» $R_{в}$, равное отношению вихревых потерь (см. (1)) к квадрату тока. Отсюда получим

$$I_0 = I(R + R_{к}) / (R + R_{к} + R_{в}). \tag{8}$$

Используем еще раз (6) (при $t = 0$), перенося член с $\mathbf{j}_0$ в левую часть, возведя обе части в квадрат и проинтегрировав с весом $1 / \sigma$; получим

$$\int\limits_V \frac{(\mathbf{j} - \mathbf{j}_0)^2}{\sigma} dV = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_V \frac{\mathbf{j}_n^2}{\sigma} dV.$$

Справа здесь стоит мощность джоулевых потерь на высших модах $W_{в}$ во всей цепи (в начальный момент). Интеграл слева равен $(I - I_0)^2 (R + R_{к}) + I_0^2 R_{в}$. Отсюда, используя (8), получим

$$W_{в} = I_0^2 R_{в} \left(1 + \frac{R_{в}}{R + R_{к}}\right).$$

Как легко видеть из (7), $R_{в} \ll R + R_{к}$, следовательно, мощность потерь (при $t = 0$) на высших модах равна мощности вихревых потерь в нулевой моде, а поскольку высшие моды затухают в $(\delta / r)^2$ раз быстрее, чем нулевая, вклад их в потери за время разряда мал.

Поступило
31 III 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Ирли, Уолкер, В сборн. Получение и исследование высокотемпературной плазмы, под ред. В. А. Фабриканта, М., 1962. [2] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, М., 1957.