Доклады Академии наук СССР
1971. Том 201, № 2

УДК 539.3

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

А. Г. АСЛАНЯН, В. Б. ЛИДСКИЙ

СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА СИСТЕМЫ, ОПИСЫВАЮЩЕЙ СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ОБОЛОЧКИ ВРАЩЕНИЯ

(Представлено академиком П. Я. Кочиной 23 IV 1971)

1°. Система дифференциальных уравнений в перемещениях, описывающая собственные колебания оболочки вращения с m волнами по параллели, имеет вид

$$\begin{gathered}
-u''-\frac{B'}{B}u'-\frac{m(1+\sigma)}{2B}v'-\left[\left(\frac{B'}{B}\right)'+(1-\sigma)\left(\frac{1}{R_1R_2}-\frac{m^2}{2B^2}\right)\right]u+\\
+\frac{m(3-\sigma)}{2B^2}B'v+\left(\frac{1}{R_1}+\frac{\sigma}{R_2}\right)w'+\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)'w=\lambda u,\\
-\frac{1-\sigma}{2}v''+\frac{m(1+\sigma)}{2B}u'-\frac{1-\sigma}{2}\frac{B'}{B}v'+\frac{m(3-\sigma)}{2B^2}B'u-\\
-\left[\frac{1-\sigma}{2}\left(\frac{B'}{B}\right)'+\frac{1-\sigma}{R_1R_2}-\frac{m^2}{B^2}\right]v-\frac{m}{B}\left(\frac{\sigma}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)w=\lambda v, \qquad (1)\\
\mu^4\frac{1}{B}\left(\frac{d}{ds}B\frac{d}{ds}-\frac{m^2}{B}\right)\frac{1}{B}\left(\frac{d}{ds}B\frac{dw}{ds}-\frac{m^2}{B}w\right)-\left(\frac{1}{R_1}+\frac{\sigma}{R_2}\right)\frac{du}{ds}-\\
-\left(\frac{\sigma}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)\frac{B'}{B}u-\frac{m}{B}\left(\frac{\sigma}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)v+\left(\frac{1}{R_1^2}+\frac{2\sigma}{R_1R_2}+\frac{1}{R_2^2}\right)w=\lambda w,
\end{gathered}$$

где $B(s)$ — радиус меридиана оболочки, s — длина дуги меридиана, $a\leqslant s\leqslant b$, $R_1^{-1}(s)$ и $R_2^{-1}(s)$ — главные кривизны оболочки; $\mu^4={}^1/_{12}h^2$, h — толщина оболочки; h — малый параметр, λ — спектральный параметр. Система (1) ниже рассматривается при граничных условиях

$$u(a)=u(b)=v(a)=v(b)=w(a)=w'(a)=w(b)=w'(b)=0, \qquad (2)$$

что соответствует защемлению по двум параллелям (см. по этому поводу ([1-3])).

Введя вектор $f=(u,v,w)$, можно записать систему (1) в виде

$$L_\mu f=\lambda f. \qquad (3)$$

Задача (3), (2) является самосопряженной. Наряду с системой (3) рассматривается вырожденная безмоментная) система

$$L_0 f=\lambda f, \qquad (4)$$

которая получается, если в (1) $\mu=0$. Задача (4) оказывается самосопряженной при граничных условиях

$$u(a)=u(b)=v(a)=v(b)=0, \qquad (5)$$

на $w(s)$ при этом никаких условий накладывать не нужно, (ср. ([4]), стр. 786). Спектр вырожденной задачи (4), (5) был нами проанализирован в работе ([3]).

2°. Поскольку безмоментный оператор L_0 содержит дифференцирование лишь второго порядка, представляет интерес вопрос о связи спектров операторов L_μ и L_0. В связи с этим отметим, что для собственных значений

$\lambda_n(\mu)$ оператора L_μ, меньших α, где

$$\alpha = \inf_{a \leqslant s \leqslant b} \frac{1-\sigma^2}{R_2^2(s)}, \tag{6}$$

выполняются условия регулярного в смысле ([5]) вырождения *. Это позволяет утверждать, что

$$\lambda_n(\mu) = \lambda_n(0) + \mu\lambda_n^{(1)} + o(\mu), \tag{7}$$

где $\lambda_n(0)$ — собственные значения вырожденного оператора L_0.

Превращение спектра L_μ при $\mu \to 0$ в спектр L_0 при $\lambda \geqslant \alpha$ являет картину гораздо более сложную. Справедливо однако следующее общее предложение, которое мы приведем сначала в абстрактной формулировке.

Теорема 1. *Пусть Δ — отрезок вещественной λ-оси, концы которого не являются точками спектра вырожденного оператора L_0. Пусть $E(\Delta, \mu)$ — ортогональный проектор на инвариантное подпространство L_μ, соответствующее спектру, расположенному на отрезке Δ, и пусть $E(\Delta)$ — аналогичный проектор оператора L_0.*

Тогда для любой вектор-функции $g(s)$ справедлива формула,

$$\lim_{\mu \to 0} E(\Delta, \mu) g = E(\Delta) g, \tag{8}$$

где предел понимается в среднем квадратичном **.

Поясним содержание теоремы 1 важным примером. Пусть отрезку Δ принадлежит лишь одна точка спектра L_0 — собственное значение λ_0, и пусть $f_0(s)$ — соответствующая собственная функция оператора L_0. Пусть $g(s)$ — произвольная вектор-функция и

$$\tilde{g}_\mu(s) = \sum_{\lambda_n(\mu) \in \Delta} c_n(\mu) f_n(s, \mu) \tag{9}$$

— отрезок разложения $g(s)$ в ряд Фурье по собственным функциям оператора L_μ, соответствующий тем его собственным значениям $\lambda_n(\mu)$, которые принадлежат Δ. При $\mu \to 0$ число слагаемых в (9) может неограниченно возрастать (!). Тем не менее в соответствии с теоремой 1 в среднем квадратичном

$$\lim_{\mu \to 0} \tilde{g}_\mu(s) = (g, f_0) \cdot f_0(s).$$

Для доказательства теоремы 1 устанавливаем сильную сходимость при $\mu \to 0$ оператора L_μ^{-1} к L_0^{-1}, а затем пользуемся одним предложением общей теории возмущений (см. ([8]), стр. 79).

3°. В связи с эффективной формулой (7) возникает вопрос о числе собственных значений оператора L_0, меньших α (первая серия, ср. ([3, 4])).

Положив в системе (1) $\mu = 0$, подставим функцию $w(s)$ из третьего уравнения в первые два. После умножения обоих уравнений на $B(s)$ придем к системе

$$\begin{aligned} &-(a(s,\lambda)u')' - b(s,\lambda)v' - {}^1\!/_2 b'(s,\lambda)v + c_{11}(s,\lambda)u + c_{12}(s,\lambda)v = 0, \\ &-(d(s,\lambda)v')' + b(s,\lambda)u' + {}^1\!/_2 b'(s,\lambda)u + c_{21}(s,\lambda)u + c_{22}(s,\lambda)v = 0. \end{aligned} \tag{10}$$

При каждом фиксированном $\lambda < \alpha$ коэффициенты системы (10) — гладкие функции s. Замечательно, что при граничных условиях (5) система (10) оказывается самосопряженной. Введем вектор-функцию $z = (u, v)$, а оператор, соответствующий левой части (10), обозначим через l_λ.

С использованием осцилляционной теоремы 1 (см. ([3]), стр. 1042) устанавливается следующее предложение.

* Этот факт в случае сферы отмечался в ([6]), см. также ([7]).

** Теорема сохраняет силу, если концы Δ (один или оба) принадлежат непрерывному спектру L_0.

Теорема 2. *Число собственных значений $n(\lambda)$ задачи* (4), (5), *меньших фиксированного* λ $(\lambda < \alpha)$, *равно числу отрицательных собственных значений задачи*

$$l_\lambda z = \rho z \tag{11}$$

при граничных условиях (5).

4°. Теорема 2 дает возможность оценить функцию $n(\lambda)$. Остановимся подробнее на случае, когда

$$\lim_{\lambda\to\alpha-0} n(\lambda) = \infty$$

(первая серия бесконечна, α — предельная точка *).

В связи с указанным отметим, что в левой части (10) $a(s,\lambda) = B(s)(\varphi_1(s)-\lambda)/(\varphi_2(s)-\lambda)$, где $\varphi_1(s) = 1-\sigma^2/R_2^2(s)$, а $\varphi_2(s) = R_1^{-2} + 2\sigma R_1^{-1}R_2^{-1} + R_2^{-2}$ (ср. [4], формулы (7)). Поэтому при $\lambda = \alpha$ система (10) является сингулярной: $a(s_0, \alpha) = 0$. Через $s = s_0$ мы обозначили точку, в которой $\varphi_1(s)$ достигает своего инфимума. Оказывается, что для бесконечности первой серии необходимо, чтобы было

$$\varphi_1'(s_0) = 0. \tag{12}$$

Это равенство возможно в двух случаях:

а) $B'(s_0) = 0$; б) $B''(s_0) = -(1-B'^2(s_0))/B(s_0)$.

Предполагая для определенности, что $\varphi_1(s)$ достигает инфимума в единственной точке $s = s_0$, сформулируем следующие два утверждения.

Теорема 3. *Пусть* $\varphi_1(s_0) = \alpha > 0$, $\varphi_1'(s_0) = 0$ *и*

$$\varphi_1''(s_0) \neq 0, \tag{13}$$

тогда

$$\lim_{\lambda\to\alpha-0} \frac{n(\lambda)}{\ln[a_2^2/(\alpha-\lambda)]} = \frac{1}{2\pi\sqrt{a_2}} \operatorname{Re}\sqrt{\delta - {}^1/_4 a_2}, \tag{14}$$

где $a_2 = {}^1/_2 a_{ss}''(s_0, \alpha) > 0$,

$$\delta = b_0^2/d_0 - c_{11,0} > 0, \tag{15}$$

и $b_0 = b(s_0,\alpha)$, $d_0 = d(s_0,\alpha)$, $c_{11,0} = c_{11}(s_0,\alpha)$.

Теорема 4. *Пусть* $\varphi_1(s_0) = \alpha > 0$ *и пусть*

$$\varphi_1'(s_0) = \varphi_1''(s_0) = \ldots = \varphi_1^{(p-1)}(s_0) = 0, \quad \varphi_1^{(p)}(s_0) \neq 0. \tag{16}$$

Тогда

$$\lim_{\lambda\to\alpha-0} \frac{n(\lambda)}{(\alpha-\lambda)^{(2-p)/(2p)}} = \frac{2}{\pi}\sqrt{\delta}\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{a_p t^p + q}}, \tag{17}$$

где $a_p = a_s^{(p)}(s_0,\alpha)/p!$, $q = -a_\lambda'(s_0,\alpha)$, *а* δ *то же, что и в теореме* 3.

Явные выражения для параметров, входящих в формулы (14) и (17), через функцию $B(s)$ и ее производные мы приведем в подробной статье. Заметим лишь, что в случае б) правые части этих формул не зависят от m (числа волн по параллели), а в случае а) существенно зависят от m. Согласно формулам (14) и (17) скорость стремления собственных чисел λ_n к α при $n\to\infty$ определяется поведением функции $\varphi_1(s)$ в окрестности точки s_0. Скорость стремления тем меньше, чем сильнее уплощение графика $\varphi_1(s)$ в окрестности s_0. Обратив формулу (17), легко получаем

$$\lambda_n = \alpha - c_0(p)n^{(2p)/(2-p)} + o(n^{(2p)/(2-p)}), \quad p > 2. \tag{18}$$

---

* См. по этому поводу [3], стр. 1042.

В связи с этой формулой укажем, что если $\varphi_1(s)$ постоянна * на отрезке $|s - s_0| \leqslant l$, то

$$\lambda_n = \alpha - c_0 n^{-2} + o(n^{-2}), \tag{19}$$

где в случае а)

$$c_0 = \frac{4l^2(1-\sigma^2)(\sigma^2+2m^2)}{\pi^2 R_2^4(s_0)},$$

а в случае б)

$$c_0 = \frac{4l^2(1-\sigma^2)(1+\sigma)(2+\sigma)}{\pi^2 R_2^4(s_0)}.$$

Авторы выражают признательность А. Л. Гольденвейзеру за неоднократные обсуждения и советы.

Институт проблем механики
Академии наук СССР
Москва

Поступило
26 III 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Л. Гольденвейзер, УМН, 15, в. 5 (1960). [2] П. Е. Товстик, Исследование по упругости и пластичности, Л., № 5, 1966, стр. 45. [3] А. Г. Асланян, В. Б. Лидский, ДАН, 196, № 5, 1040 (1971). [4] В. Б. Лидский, Н. В. Харькова, ДАН, 194, № 4, 786 (1970). [5] М. И. Вишик, Л. А. Люстерник, УМН, 12, в. 5 (77) (1957). [6] П. Е. Товстик, Изв. АН СССР, Механика, № 6, 111 (1965). [7] Н. В. Харькова, ПММ, 35, № 3 (1971). [8] Н. Данфорд, Дж. Шварц, Линейные операторы, 2, М., 1966, стр. 79.

* В этом случае часть оболочки, соответствующая значениям $|s - s_0| \leqslant l$, представляет либо цилиндр (случай а)), либо сферу (случай б)).