

УДК 532.517.4:532.542.4

ГИДРОМЕХАНИКА

Г. Н. АБРАМОВИЧ, Д. С. КОВНЕР, В. Г. ЛУЩИК

О ВОЗДЕЙСТВИИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ НА ТУРБУЛЕНТНОСТЬ В ТЕЧЕНИИ СО СДВИГОМ

(Представлено академиком Л. И. Седовым 23 VIII 1971)

1. Экспериментальные исследования показывают, что при наложении магнитного поля на турбулентное течение электропроводной жидкости уровень турбулентности, напряжение трения и интенсивность теплообмена обычно снижаются (¹). Влияние магнитного поля на эти характеристики турбулентности может быть объяснено качественно и оценено количественно на основе теории пути смешения Прандтля.

В турбулентном течении в отсутствие магнитного поля обычно предполагается, что от момента зарождения дискретного турбулентного моля до слияния с новым слоем жидкости он движется по инерции, сохраняя постоянное значение скорости, а в момент потери своей индивидуальности создает пульсацию скорости, равную разности осредненных скоростей на расстоянии пути смешения l . Если в плоском турбулентном течении (в плоскости x_1, x_2) со сдвигом использовать модель локально-изотропной турбулентности, то компоненты пульсационной скорости имеют порядок

$$u_i^{(n)} \sim u_i^{(k)} \sim l dU_1/dx_2, \quad (1)$$

где (н) относится к начальному, а (к) — к конечному моментам существования моля. Напряжение турбулентного трения в этом случае определяется формулой

$$\tau_t = -\overline{\rho u_1^{(k)} u_2^{(k)}} = \rho l^2 (dU_1/dx_2)^2. \quad (2)$$

При наличии магнитного поля в турбулентном течении возникает объемная пульсационная сила, которая изменяет величину пульсационной скорости и порождает анизотропию турбулентности. Величина пульсационной силы на единицу объема при малых магнитных числах Рейнольдса, когда можно пренебречь пульсациями магнитного поля, определяется формулой

$$\mathbf{f} = \sigma[(\mathbf{e} + [\mathbf{u} \times \mathbf{B}]) \times \mathbf{B}], \quad (3)$$

где $\mathbf{e}$ — пульсационная составляющая электрического поля. Примем далее, что $\mathbf{e}$ пропорциональна индуцированному электрическому полю и направлена ему навстречу, т. е.

$$\mathbf{e} = -\beta[\mathbf{u} \times \mathbf{B}]. \quad (4)$$

Для β можно провести оценку: при движении моля конечной проводимости в среде с бесконечной проводимостью $\beta = 0$, а при движении в непроводящей среде $\beta = 1$. С использованием этой гипотезы

$$\mathbf{f} = \alpha\sigma[[\mathbf{u} \times \mathbf{B}] \times \mathbf{B}]. \quad (5)$$

Из формулы (5) можно получить выражения для составляющих пульсационной силы при различных ориентациях внешнего магнитного поля:

$$f_1 = \begin{cases} 0, \\ -\alpha\sigma u_1 B_2^2, \\ -\alpha\sigma u_1 B_3^2; \end{cases} \quad f_2 = \begin{cases} -\alpha\sigma u_2 B_1^2, & (B_1, 0, 0) \\ 0, & (0, B_2, 0) \\ -\alpha\sigma u_2 B_3^2, & (0, 0, B_3) \end{cases} \quad (6)$$

$$\alpha = 1 - \beta.$$

Видно, что силы, действующие на моль в магнитном поле, всегда направлены против движения, т. е. вызывают уменьшение пульсационных скоростей, причем составляющая пульсационной силы в направлении магнитного поля равна нулю.

Рассмотрим движение моля с учетом воздействия только объемной электромагнитной силы:

$$\rho du_i / dt = -\alpha \sigma B_j^2 u_i \quad (\text{для } f_i \neq 0) \quad (7)$$

откуда

$$u_i = u_i^{(n)} \exp \left(-\alpha \frac{\sigma B^2}{\rho} t \right) \quad (8)$$

(поскольку при $t = 0$ $u_i = u_i^{(n)}$). Разлагая экспоненту в ряд и ограничиваясь первыми членами разложения, принимая $t^{(n)} = l / u_i^{(n)}$ и $u_i^{(n)} = l dU_1 / dx_2$, получим

$$u_i^{(n)} = u_i^{(n)} (1 - \alpha S_l), \quad (9)$$

$$S_l = \sigma B^2 / (\rho dU_1 / dx_2), \quad (10)$$

— локальный критерий м.г.л.-взаимодействия.

Исходя из формул (2) и (9), можно получить выражения для турбулентного трения в плоском течении при различных ориентациях внешнего магнитного поля

$$\tau_\tau = \begin{cases} \rho l^2 (dU_1 / dx_2)^2 (1 - \alpha S_l), & (B_1, 0, 0) \\ \rho l^2 (dU_1 / dx_2)^2 (1 - \alpha S_l), & (0, B_2, 0) \\ \rho l^2 (dU_1 / dx_2)^2 (1 - \alpha S_l)^2, & (0, 0, B_3) \end{cases} \quad (11)$$

Существующие полуэмпирические методы расчета турбулентного трения в магнитном поле (^{1, 6}) основаны либо на модификации выражения для пути смещения в формуле Прандтля (2), либо на решении уравнений для вторых моментов пульсационных скоростей. Использование уравнений для вторых моментов позволяет учесть различие влияний полей разной ориентации на турбулентное трение, однако требует весьма трудоемких расчетов. Предложенные до сих пор модификации формулы Прандтля не позволяют единым способом (при едином выборе констант) описать разное влияние полей B_1 и B_3 . Формулы (11) описывают эту разницу на основе достаточно простой модели.

2. Уравнение движения для течения между параллельными плоскостями $x_2 = \pm a$ в полях $(B_1, 0, 0)$ или $(0, 0, B_3)$ в отсутствие средних токов имеет вид

$$v \frac{d^2 U_1}{dx_2^2} - \frac{d}{dx_2} \overline{u_1 u_2} - \frac{1}{\rho} \frac{dP}{dx_1} = 0. \quad (12)$$

Из формул (11) видно, что поле $(0, 0, B_3)$, далее называемое окружным, оказывает большее воздействие на трение, чем продольное магнитное поле.

Для течения в поле $(0, B_2, 0)$ уравнение движения имеет более сложный вид:

$$v \frac{d^2 U_1}{dx_2^2} - \frac{d}{dx_2} \overline{u_1 u_2} - \frac{1}{\rho} \frac{dP}{dx_1} = \sigma B_2^2 (U_{\text{ср}} - U), \quad (13)$$

поскольку поле взаимодействует не только с пульсационными, но и с осредненной скоростями.

3. Для турбулентного течения вблизи безграничной твердой стенки в том случае, когда можно пренебречь молекулярной вязкостью, уравнение движения принимает простой вид $\tau_\tau = \tau_w = \text{const}$ и при выборе формулы для пути смещения по Прандтлю $l = \kappa x_2$ допускает интегрирование для случаев продольного и окружного полей. Действительно, для поля $(B_1, 0, 0)$ при выборе характерной скорости U_m на расстоянии δ от стенки, уравнение движения запишется в форме

$$(d\overline{U_1} / d\bar{x}_2)^2 - S_m (d\overline{U_1} / d\bar{x}_2) - c^2 / (\kappa^2 \bar{x}_2^2) = 0. \quad (14)$$

где $\bar{U}_1 = U_1 / U_m$, $\bar{x}_2 = x_2 / \delta$, $S_m = \alpha \sigma B^2 \delta / (\rho U_m)$ и $c^2 = \tau_w / (\rho U_m^2)$, откуда после использования условия $\bar{U}_1 = 1$ при $\bar{x}_2 = 1$ получим

$$1 - \bar{U}_1 = \frac{S_m}{2} [1 - \bar{x}_2 - \sqrt{1 + 4c^2/(\kappa^2 S_m^2)} - \sqrt{\bar{x}_2^2 + 4c^2/(\kappa^2 S_m^2)} + \\ + \frac{2c}{\kappa S_m} \ln \frac{2c/(\kappa S_m) + \sqrt{\bar{x}_2^2 + 4c^2/(\kappa^2 S_m^2)}}{\bar{x}_2 (2c/(\kappa S_m) + \sqrt{1 + 4c^2/(\kappa^2 S_m^2)})}]. \tag{15}$$

Аналогично для поля $(0, 0, B_2)$ можно вывести профиль скорости в форме

$$1 - \bar{U}_1 = S_m (1 - \bar{x}_2) - \frac{c}{\kappa} \ln \bar{x}_2. \tag{16}$$

При вычислении профиля скорости вплоть до стенки естественно допустить существование вязкого подслоя с чисто ламинарным течением, толщина которого при двухслойной модели определяется соотношением

$$u_* x_2 / \nu < 12,5, \tag{17}$$

где $u_* = \sqrt{\tau_w / \rho}$.

Численное интегрирование уравнений (12) и (13) для всех случаев ориентации магнитного поля, а также расчет по формулам (15) и (16) показал хорошее качественное и удовлетворительное количественное совпадение с экспериментом для коэффициента гидравлического сопротивления при течении в плоских каналах и трубах при выборе $\alpha = 0,22$.

4. На основании полученных выражений для турбулентного трения рассмотрим течение электропроводной жидкости в свободном пограничном слое в простейшем случае, когда отсутствует взаимодействие магнитного поля со средним движением (случай продольного и окружного полей). При этом в уравнении движения в проекции на ось x_1 , как показывают оценки ⁽²⁾, градиентом давления по сравнению с инерционными членами можно пренебречь и отличие от случая отсутствия магнитного поля будет состоять в определении τ_+ .

Опыт показывает ⁽³⁾, что при течении в продольном магнитном поле форма профиля продольной составляющей скорости не претерпевает существенных изменений и близка к линейной, как и в случае отсутствия поля. В этом случае локальный критерий м.г.д.-взаимодействия можно приближенно считать постоянным и не зависящим от поперечной координаты поперек свободного пограничного слоя шириной b с разностью скоростей на границе ΔU_1 :

$$S_l \approx \frac{\sigma B^2}{\rho} \frac{b}{\Delta U_1}. \tag{18}$$

Используя предположение о постоянстве S_l , а следовательно, и относительного уменьшения напряжения трения

$$\tau / \tau_{B=0} = \psi(S_l), \tag{19}$$

вводя переменные ⁽⁴⁾

$$\tilde{x}_1 = \int_0^{x_1} \psi dx', \quad \tilde{U}_2 = U_2 / \psi, \tag{20}$$

уравнение движения в проекции на ось x_1 с учетом (19) можно преобразовать к виду

$$U_1 \frac{\partial U_1}{\partial x_1} + \tilde{U}_2 \frac{\partial U_1}{\partial x_2} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{B=0}}{\partial x_2}. \tag{21}$$

Полученное уравнение в переменных $(\tilde{x}_1, x_2)$ полностью совпадает с уравнением движения в свободном турбулентном пограничном слое в случае отсутствия магнитного поля, решение которого в теории струй для многих практически важных случаев известно ⁽⁵⁾. Таким образом, остается

лишь осуществить переход из плоскости $(\tilde{x}_1, x_2)$ в физическую плоскость (x_1, x_2) .

Для случая смещения двух полубесконечных потоков однородной жидкости с разностью скоростей ΔU , зависимость ширины зоны смещения b от $\tilde{x}_1$ (в случае нулевой начальной ширины слоя) имеет вид

$$b = k\tilde{x}_1, \quad (22)$$

где k — эмпирическая постоянная в теории струй в отсутствие магнитного поля ⁽⁵⁾.

Используя соотношения (18) — (22), можно получить связь между переменными $\tilde{x}_1$ и x_1 , которая для случаев продольного и окружного магнитных полей имеет соответственно вид

$$\frac{\tilde{x}_1}{x_1} = \frac{1 - e^{-S}}{S}; \quad \frac{\tilde{x}_1}{x_1} = \frac{1}{1 + S}, \quad S = k\alpha \frac{\sigma B^2}{\rho} \cdot \frac{x_1}{\Delta U_1}. \quad (23)$$

Из полученных формул видно, что с ростом величины S (магнитного поля) координата $\tilde{x}_1$ при фиксированном значении физической координаты x уменьшается, что согласно формуле (22) приводит к сужению ширины зоны смещения по сравнению со случаем отсутствия магнитного поля.

Аналогичным образом можно осуществить переход из плоскости $(\tilde{x}_1, x_2)$ в физическую плоскость и для других типов струйных течений.

Московский авиационный институт
им. Серго Орджоникидзе

Поступило
8 VI 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Г. Г. Брановер, А. Б. Ципобер, Магнитная гидродинамика несжимаемых сред, «Наука», 1970. ² В. Г. Луцкий, С. А. Регирер, Изв. АН СССР, мех. жидкости и газа, № 1(1971). ³ M. Sajben, J. A. Fay, J. Fluid Mech., 27, № 1 (1967). ⁴ В. М. Иевлев, Симпозиум по проблемам турбулентных течений, Тез. докл. и сообщений, 1967. ⁵ Г. Н. Абрамович, Теория турбулентных струй, 1960. ⁶ П. С. Ликодис, Экспериментальные исследования процессов переноса в турбулентном потоке проводящей среды в присутствии магнитного поля, М., 1965, Международный симпозиум по свойствам и применению низкотемпературной плазмы, М., 1965.