

МЕХАНИКА СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

И. П. АНДРЕЙЧИКОВ, В. И. ЮДОВИЧ

**ОБ АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫХ РЕЖИМАХ, ОТВЕТВЛЯЮЩИХСЯ
ОТ ТЕЧЕНИЯ ПУАЗЕЙЛЯ В ПЛОСКОМ КАНАЛЕ***(Представлено академиком Г. И. Петровым 3 VI 1971)*

В работе исследован характер потери устойчивости течения Пуазейля в плоском канале при переходе числа Рейнольдса R через критическое значение. Расход предполагается заданным. Возмущения считаются периодическими вдоль канала с заданным волновым числом α . Использован метод Ляпунова — Шмидта, развитый в применении к задаче о возникновении автоколебаний сплошных сред в ⁽¹⁾. Метод реализуется численно на ЭВМ.

Оказывается, характер потери устойчивости существенно зависит от α . Пусть R_* — минимальное по α критическое число Рейнольдса, а α_* — соответствующее ему волновое число. Тогда для α , близких к α_* , а также для всех α на верхней ветви нейтральной кривой при малой докритичности существует автоколебательный режим типа простой волны, распространяющейся вдоль канала. Он неустойчив и сливается с течением Пуазейля при критическом значении числа Рейнольдса. При малой сверхкритичности в окрестности течения Пуазейля автоколебаний не существует. На нижней ветви нейтральной кривой, начиная с некоторого значения α , картина меняется: когда R переходит через критическое значение, возникает устойчивый автоколебательный режим.

Эти результаты соответствуют подтвержденному также экспериментальными ⁽²⁾ представлению о неустойчивости течения Пуазейля относительно достаточно больших конечных возмущений уже при $R < R_*$ и катастрофическом разрушении этого течения при переходе R через значение R_* . Подобная ситуация возникает во многих нелинейных задачах механики сплошной среды, например, для упругих оболочек ⁽³⁾.

Задаче о нелинейном развитии возмущений параллельных потоков посвящены работы Дж. Стюарта ^(4, 5) и Дж. Уотсона ⁽⁶⁾, которые развивали идеи Л. Д. Ландау ⁽⁷⁾. У. Рейнольдс и М. Поттер ⁽⁸⁾ на основе этого метода провели исследование устойчивости течения Пуазейля — Куэтта. Однако автоколебательный режим в ⁽⁸⁾ не был рассчитан — вычисления проведены лишь на нейтральной кривой, тогда как в методе Ландау — Стюарта требуется расчет вне ее. К. Пекерис и Б. Школлер в ^(9, 10) применяют метод Ландау — Стюарта и метод Галеркина к несколько измененной задаче, когда вместо расхода задается средний градиент давления, и также приходят к выводу о существовании докритической неустойчивости. Отметим еще работы ^(11, 12), в которых предлагается иной метод разложения вторичных режимов.

Будем рассматривать движения вязкой несжимаемой жидкости в полосе $-1 \leq y \leq 1$ на плоскости (x', y) . Границы $y = \pm 1$ суть неподвижные твердые стенки. Будем считать заданным расход жидкости Q через поперечное сечение.

Уравнение для функции тока ψ' и краевые условия в безразмерной форме запишем в виде

$$\Delta \psi' + \psi'_y \Delta \psi'_x - \psi'_x \Delta \psi'_y - \frac{1}{R} \Delta^2 \psi' = 0, \quad \psi' \Big|_{y=\pm 1} = \mp \frac{2}{3}, \quad \psi'_y \Big|_{y=\pm 1} = 0. \quad (1)$$

Здесь $R = 3Q / (4\nu)$ — число Рейнольдса, ν — кинематический коэффициент вязкости. Потребуем еще, чтобы функция тока ψ' была периодической по x' с заданным периодом $2\pi / \alpha$, α — волновое число.

Всем этим условиям удовлетворяет известное течение Пуазейля с параболическим профилем скорости $u(y) = 1 - y^2$ и функцией тока $\psi_0(y) = y - \frac{1}{3}y^3$.

Автоколебательное решение поставленной задачи будем разыскивать в виде *

$$\psi'(x', y, t) = \psi_0^*(y) + \frac{1}{R} \psi(x, y), \quad x = x' - ct. \quad (2)$$

Подставляя (2) в (1), получим для определения функции ψ и фазовой скорости c нелинейную задачу на собственные значения

$$\Delta^2 \psi = \psi_y \Delta \psi_x - \psi_x \Delta \psi_y + R(U \Delta \psi_x - U'' \psi_x) - c \Delta \psi_x; \quad (3)$$

$$\psi|_{y=\pm 1} = \psi_y|_{y=\pm 1} = 0, \quad \psi(x + 2\pi / \alpha, y) \equiv \psi(x, y). \quad (4)$$

Пусть $R_0 = R_0(\alpha)$ — критическое значение числа Рейнольдса для данного волнового числа α . Введем теперь параметр $\varepsilon = \sqrt{|R - R_0|}$ и, считая его малым, станем разыскивать малые решения системы (3) — (4) в виде рядов по степеням ε . Сначала рассмотрим сверхкритические автоколебания ($R < R_0$). Положим.

$$R = R_0 + \varepsilon^2, \quad \psi = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \psi_k, \quad c = R_0 \sum_{k=0}^{\infty} c_k \varepsilon^k. \quad (5)$$

Подставляя (5) в (3) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях ε , получим для определения функций ψ_k и чисел c_k бесконечную последовательность уравнений

$$\begin{aligned} \Delta^2 \psi_k - R_0 [(U - c_0) \Delta \psi_{kx} - U'' \psi_{kx}] &= [U \Delta \psi_{k-2, x} - U'' \psi_{k-2, x}] + \\ &+ \sum_{j=1}^{k-1} [(\psi_{k-j, y} - R_0 c_{k-j}) \Delta \psi_{jx} - \psi_{k-j, x} \Delta \psi_{jy}] \equiv f_k \end{aligned} \quad (6)$$

с краевыми условиями (4). При $k = 1$ уравнение (6) однородно и его решение имеет вид**

$$\psi_1(x, y) = \beta_1 (e^{i\alpha x} \varphi(y) + e^{-i\alpha x} \bar{\varphi}(y)), \quad (7)$$

где φ — решение краевой задачи для уравнения Орра — Зоммерфельда

$$L_{\alpha} \varphi \equiv (D^2 - \alpha^2)^2 \varphi - i\alpha R_0 [(U - c_0) (D^2 - \alpha^2) \varphi - U'' \varphi] = 0, \quad (8)$$

$$\varphi(\pm 1) = \varphi'(\pm 1) = 0.$$

Неизвестная положительная постоянная β_1 (амплитуда) определяется из условия разрешимости уравнения (6) при $k = 3$:

$$\int_{-1}^1 \int_0^{2\pi/\alpha} f_3(x, y) e^{-i\alpha x} \theta(y) dx dy = 0, \quad (9)$$

функция θ — решение сопряженного уравнения Орра — Зоммерфельда

$$(D^2 - \alpha^2)^2 \theta - i\alpha R_0 [(U - c_0) (D^2 - \alpha^2) \theta + 2U' \theta'] = 0, \quad (10)$$

$$\theta(\pm 1) = \theta'(\pm 1) = 0.$$

Из условия разрешимости уравнения (6) при $k = 2$ получаем, что $c_1 = 0$ (вообще $c_{2n+1} = 0$), если отличен от нуля интеграл

$$J_1 = \int_0^1 (D^2 - \alpha^2) \varphi \theta dy. \quad (11)$$

* Можно показать, что всякий предельный цикл системы (1) допускает представление (2).

** Вообще говоря, надо учитывать также решения, содержащие $\exp(in\alpha x)$ с целым n . Однако рассмотрение нейтральной кривой показывает, что при α , не слишком далеких от α_* , и $n > 1$ такие возмущения затухают при всех R .

Функция ψ_2 имеет вид

$$\psi_2(x, y) = \beta_1^2 [V_0(y) + V_1(y) e^{2iax} + \bar{V}_1(y) e^{-2iax}], \quad (12)$$

функции V_0 и V_1 суть решения краевых задач

$$V_0^{IV} = i\alpha \frac{d^2}{dy^2} (\bar{\varphi}\varphi' - \varphi\bar{\varphi}'), \quad V_0(0) = V_0'(0) = V_0(1) = V_0'(1) = 0; \quad (13)$$

$$L_{2\alpha} V_1 = i\alpha \frac{d}{dy} (\varphi'^2 - \varphi\varphi''), \quad V_1(0) = V_1'(0) = V_1(1) = V_1'(1) = 0. \quad (14)$$

Подставляя (7) и (12) в (9), приходим к уравнению для определения констант c_2 и β_1 :

$$-c_2 R_0 J_1 + \beta_1^2 J_2 + J_3 = 0, \quad (15)$$

$$J_2 = \int_0^1 [V_0'(D^2 - \alpha^2)\varphi - V_1'(D^2 - \alpha^2)\bar{\varphi} - 2V_1(D^2 - \alpha^2)\bar{\varphi}' - \\ - \varphi V_0''' + 2\bar{\varphi}'(D^2 - 4\alpha^2)V_1 + \bar{\varphi}(D^2 - 4\alpha^2)V_1'] \theta dy,$$

$$J_3 = \int_0^1 [U(D^2 - \alpha^2)\varphi - U''\varphi] \theta dy.$$

Если постоянная β_1^2 , определенная из (15), оказывается положительной, то из результатов (1) следует существование сверхкритического автоколебательного режима (5). Если же она отрицательна, то существуют лишь докритические автоколебания. В этом случае в (5) следует положить $R = R_0 - \varepsilon^2$, а в (15) заменить J_3 на $-J_3$.

Исследование устойчивости цикла (5) проводится методом линеаризации. Линеаризованная задача при малых ε решается методом возмущений. Цикл оказывается устойчивым, а течение Пуазейля неустойчивым, если $2\alpha \operatorname{Im} J_3 / J_1 > 0$. Он неустойчив, если эта величина отрицательна; течение Пуазейля в этом случае устойчиво. Сверхкритические автоколебания оказываются устойчивыми, докритические — неустойчивыми.

Опишем коротко методику вычислений. Критические значения R_0 , c_0 при заданном α определяются методом (14), модифицированным так, чтобы все время оставалось на нейтральной кривой. При известных R_0 , c_0 функция φ находится как линейная комбинация двух четных решений φ_1 , φ_2 уравнения (8). Решение φ_1 удовлетворяет начальным условиям $\varphi(0) = 1$, $\varphi''(0) = \alpha$, причем постоянная α выбирается путем минимизации величины $|\varphi(1)|$. Начальные условия для φ_2 имеют вид $\varphi_2(0) = 0$, $\varphi_2''(0)$ — произвольное малое число. Погрешность вычисления φ не превосходит 10^{-7} .

Таблица 1

R_0	c_0	α	$c_2 R_0$	β_1	q
7500	0,234429	0,874738	0,5959	5,044	-0,7032
6500	0,247327	0,927665	0,2818	4,982 *	0,8342
5772,2210	0,26400033	1,020548	-0,16507	1,3448 *	0,08184
6500	0,265060	1,080574	-0,2016	0,663 *	0,0231

Примечание. Числа, помеченные звездочкой, соответствуют докритическому случаю.

Функция θ вычисляется аналогично. При решении неоднородного уравнения (14) эта методика применяется отдельно на отрезках $[0, 1/2]$ и $[1/2, 1]$. Численное интегрирование проведено методом Рунге — Кутты с погрешностью порядка h^5 и автоматическим выбором шага h .

Интегралы J_1, J_2, J_3 вычисляются тоже методом Рунге — Кутта одновременно с решением уравнений. Некоторые результаты расчетов представлены в табл. 1.

Возмущение давления легко находится из уравнений Навье — Стокса, если функция ψ уже найдена. Для поправки к среднему (по периоду) градиенту давления имеем $\bar{p}_x = \varepsilon^2 q + \dots$. Величина q оказывается постоянной и также приведена в табл. 1. Вычисления проведены на ЭВМ «ODRA-1204».

Ростовский
государственный университет

Поступило
18 V 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ В. И. Юдович, ПММ, 35, № 4 (1971). ² S. J. Davies, C. M. White, Proc. Roy. Soc. A, 119, 92 (1928). ³ И. И. Ворович, ДАН, 122, № 1, 37 (1958). ⁴ J. T. Stuart, J. Fluid Mech., 4, № 1, 1 (1958). ⁵ J. T. Stuart, J. Fluid Mech., 9, № 3, 353 (1960). ⁶ J. Watson, J. Fluid Mech., 9, № 3, 371 (1960). ⁷ Л. Д. Ландау, ДАН, 44, № 8, 339 (1944). ⁸ W. C. Reynolds, M. C. Potter, J. Fluid Mech., 27, № 3 (1967). ⁹ C. L. Pekeris, B. Shkoller, J. Fluid Mech., 39, № 3 (1969). ¹⁰ C. L. Pekeris, B. Shkoller, Proc. Nat. Acad. Sci., 68, 1 (1971). ¹¹ В. В. Струминский, ДАН, 151, № 5, 1046 (1963). ¹² В. В. Струминский, ДАН, 153, № 3, 547 (1963). ¹³ В. И. Юдович, ДАН, 195, № 3, 574 (1970). ¹⁴ М. А. Гольдштик, В. А. Сапожников, Изв. АН СССР. Мех. жидкости и газа, № 5 (1968).