

И. Ю. БАБИЧ, А. Н. ГУЗЬ

О ПРИМЕНИМОСТИ ПОДХОДА ЭЙЛЕРА К ИССЛЕДОВАНИЮ УСТОЙЧИВОСТИ ДЕФОРМИРОВАНИЯ АНИЗОТРОПНЫХ НЕЛИНЕЙНО-УПРУГИХ ТЕЛ ПРИ КОНЕЧНЫХ ДОКРИТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЯХ

(Представлено академиком Л. И. Седовым 10 VI 1971)

Достаточные условия применимости метода Эйлера при исследовании устойчивости деформирования упругих тел получены в ⁽¹⁾ для случая теории малых докритических деформаций при некоторых упрощениях (докритическое состояние определялось по геометрически линейной теории). В ⁽²⁾ этот вопрос исследован для случая конечных докритических деформаций изотропного нелинейно-упругого тела.

В этой статье мы выводим достаточные условия применения метода Эйлера в теории устойчивости деформирования нелинейно-упругого анизотропного тела с произвольной формой упругого потенциала при конечных докритических деформациях.

Трехмерное тело отнесем к лагранжеским координатам, которые до деформации совпадают с декартовыми, и будем исследовать устойчивость деформирования по линеаризованным уравнениям. В качестве характеристик деформации будем использовать компоненты тензора конечных деформаций Грина, отменяя индексом 0 величины докритического состояния. Линеаризованные уравнения при конечных докритических деформациях представим в форме

$$[\sigma_{in}^* (\delta_{nm} + u_{m,n}^0) + \sigma_{in}^{*0} u_{m,n}]_{,i} + X_m^* - \rho^* \ddot{u}_m = 0 \quad (n, m, i=1, 2, 3). \quad (1)$$

Граничные условия в напряжениях на части поверхности S_1 и в перемещениях на части поверхности S_2 запишем в форме

$$N_i [\sigma_{in}^* (\delta_{nm} + u_{m,n}^0) + \sigma_{in}^{*0} u_{m,n}] |_{S_1} = P_m^*, u_m |_{S_2} = 0. \quad (2)$$

Принятые здесь обозначения совпадают с обозначениями работы ⁽³⁾.

В случае анизотропного (с прямолинейной анизотропией) нелинейно-упругого тела упругий потенциал Φ не обязательно представляет полином ⁽²⁾ от всех компонент тензора Грина. Предположим, что это произвольная дважды непрерывно дифференцируемая функция, тогда для определения величин σ_{ij}^* имеем ⁽²⁾

$$\sigma_{ij}^* = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \epsilon_{ij}} + \frac{\partial}{\partial \epsilon_{ji}} \right) \Phi(\epsilon_{11}, \dots, \epsilon_{31}). \quad (3)$$

Линеаризуем соотношения (3), в результате получаем

$$\sigma_{ij}^* = \lambda_{ija\beta} u_{a,\beta} \quad (i, j, a, \beta = 1, 2, 3), \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \lambda_{ija\beta} = \frac{1}{4} & \left(\frac{\partial}{\partial \epsilon_{a\beta}^0} + \frac{\partial}{\partial \epsilon_{\beta a}^0} + u_{a,n}^0 \frac{\partial}{\partial \epsilon_{n\beta}^0} + u_{a,p}^0 \frac{\partial}{\partial \epsilon_{\beta p}^0} \right) \times \\ & \times \left(\frac{\partial}{\partial \epsilon_{ij}^0} + \frac{\partial}{\partial \epsilon_{ji}^0} \right) \Phi^0(\epsilon_{11}^0, \dots, \epsilon_{31}^0). \end{aligned} \quad (5)$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что

$$\lambda_{ija\beta} \equiv \lambda_{jia\beta}, \quad \lambda_{ija\beta} \neq \lambda_{i\beta a}, \quad \lambda_{ija\beta} \neq \lambda_{a\beta ij}. \quad (6)$$

Свойства (6) свидетельствуют о том, что линеаризованные соотношения (4) для нелинейно-упругого анизотропного тела при конечных докритических деформациях не совпадают с соотношениями для малых деформаций линейно-упругого анизотропного неоднородного тела.

Подставляя выражения (4) в (1) и (2) , приходим к линейной однородной краевой задаче с переменными коэффициентами

$$(v_{i\alpha\beta} u_{\alpha,\beta} + \sigma_{in}^* u_{m,n})_{,i} + X_m^* - \rho^* \ddot{u}_m = 0; \quad (7)$$

$$N_i (v_{i\alpha\beta} u_{\alpha,\beta} + \sigma_{in}^* u_{m,n})|_{S_1} = P_m^*, \quad u_m|_{S_2} = 0. \quad (8)$$

Здесь введено обозначение

$$v_{ija\beta} = \lambda_{ina\beta} (\delta_{jn} + u_{j,n}^0). \quad (9)$$

Учитывая выражения (5) и (9) , в результате ряда преобразований можно показать, что выполняется тождество

$$v_{ija\beta} \equiv v_{\beta\alpha ji}. \quad (10)$$

Докажем самосопряженность статической краевой задачи, соответствующей задаче $(7)-(8)$. Пусть $u_i^{(1)}$ и $u_i^{(2)}$ — компоненты двух произвольных дважды непрерывно дифференцируемых векторов, удовлетворяющих краевым условиям (8) . Обозначим индексами 1 и 2 величины возмущений поверхностных и массовых сил, соответствующих $u_i^{(1)}$ и $u_i^{(2)}$, а через $L_m(u_1^{(1)}, u_2^{(1)}, u_3^{(1)})$ и $L_m(u_1^{(2)}, u_2^{(2)}, u_3^{(2)})$ — уравнения статической системы; соответствующей системе (7) . Условие самосопряженности (4) запишем в виде (1)

$$\int_V [u_m^{(1)} L_m(u_1^{(2)}, u_2^{(2)}, u_3^{(2)}) - u_m^{(2)} L_m(u_1^{(1)}, u_2^{(1)}, u_3^{(1)})] dV = 0. \quad (11)$$

В силу использования лагранжевых координат при интегрировании по объему и поверхности тела необходимо интегрирование вести по объему и поверхности тела до деформации.

Применяя теорему Гаусса — Остроградского и учитывая граничные условия (8) , в результате ряда преобразований из условия (11) получаем

$$\begin{aligned} \iint_{S_1} (u_m^{(1)} P_m^{*(2)} - u_m^{(2)} P_m^{*(1)}) dS + \int_V (u_m^{(1)} X_m^{*(2)} - u_m^{(2)} X_m^{*(1)}) dV - \\ - \int_V (v_{i\alpha\beta} - v_{\beta\alpha i}) u_{m,i}^{(1)} u_{\alpha,\beta}^{(2)} dV = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Учитывая тождество (10) , получаем условие самосопряженности статических краевых задач, соответствующих (7) , (8) , для нелинейно упругого анизотропного тела с произвольной формой упругого потенциала

$$\iint_{S_1} (u_m^{(1)} P_m^{*(2)} - u_m^{(2)} P_m^{*(1)}) dS + \int_V (u_m^{(1)} X_m^{*(2)} - u_m^{(2)} X_m^{*(1)}) dV = 0. \quad (13)$$

Повторив ход рассуждений (1) , приходим к выводу, что для применения метода Эйлера достаточным условием в рамках теории конечных докритических деформаций нелинейно упругого анизотропного тела является самосопряженность статических линеаризованных задач.

Учитывая вышеизложенное замечание, заключаем, что независимо от формы упругого потенциала в случае теории конечных докритических деформаций нелинейно упругого анизотропного тела единственным достаточным условием применения подхода Эйлера является условие (13) . Оно совпадает с результатом работы (1) , полученным в рамках теории малых докритических деформаций линейно упругого тела, когда докритическое состояние приближенно определяется по классической теории упругости.

Институт механики
Академии наук УССР
Киев

Поступило
26 V 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ В. В. Болотин, Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости, М., 1961. ² А. Грин, Дж. Адкис, Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды, М., 1965. ³ А. Н. Гузь, ДАН, 194, № 1 (1970). ⁴ С. Г. Михлин, Проблема минимума квадратичного функционала, М., 1952.