Доклады Академии наук СССР
1971. Том 201, № 2

УДК 519.95

КИБЕРНЕТИКА И ТЕОРИЯ РЕГУЛИРОВАНИЯ

В. В. ВЕЛИЧЕНКО

# ВОПРОСЫ ИНВАРИАНТНОСТИ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ

*(Представлено академиком Б. Н. Петровым 26 IV 1971)*

Задача слабой инвариантности дискретных систем рассматривалась в ([1]). В настоящей работе изучается общая задача инвариантности нелинейных дискретных систем. Выясняется аналогия межу условиями инвариантности и свойствами дискретных и непрерывных ([2-4]) инвариантных систем.

1°. Постановка задачи. Пусть задана $n$-мерная система дискретных уравнений

$$x^{i+1} = f^{i+1}(x^i, u^i) \qquad (i = 0, \ldots, N-1) \tag{1}$$

и последовательность функций

$$\Phi = \{\Phi^1(x^1), \Phi^2(x^2), \ldots, \Phi^N(x^N)\}. \tag{2}$$

Назовем систему (1) $\Phi^i(x^i)$-инвариантной по $u$ в заданной области $A = \{A^0, A^1, \ldots, A^N\}$ $(A^i \subset X^i = E_n)$ (или сильно инвариантной), если на ее траекториях последовательность значений (2) от возмущения $u = \{u^0, \ldots, u^{N-1}\}$ не зависит. Будем разыскивать условия $\Phi^i(x^i)$-инвариантности системы (1).

Функция $f^i$ в областях их определения $G^i \subset X^i \times U^i$ и $\Phi^i$ в $A^i$ предполагаются непрерывными по совокупности своих переменных и непрерывно дифференцируемыми по $x^i$. Допустимыми будем считать возмущения $u$, при которых $x^i \in A^i$ и $\{x^i, u^i\} \in G^i$.

2°. Условия инвариантности. Зафиксируем опорное возмущение ([1]) $\tilde{u} = \{\tilde{u}^0, \ldots, \tilde{u}^{N-1}\}$ и для каждой функции последовательности (2) построим систему функций

$$\tilde{\Phi}_0^i(x^i) = \Phi^i(x^i), \quad \tilde{\Phi}_k^i(x^{i-k}) = \tilde{\Phi}_{k-1}^i[f^{i-k+1}(x^{i-k}, \tilde{u}^{i-k})] \quad (k = 1, \ldots, i-1). \tag{3}$$

Используя (1), запишем $\tilde{\Phi}_j^i(x^{i-j}) = \tilde{\Phi}_j^i[f^{i-j}(x^{i-j-1}, u^{i-j-1})]$ и построим матрицу (функции (3) записываются по диагонали):

$$\left\| \begin{matrix} \tilde{\Phi}_0^1[f^1(x^0, u^0)] & \ldots \tilde{\Phi}_0^i[f^i(x^{i-1}, u^{i-1})] & \ldots \tilde{\Phi}_0^N[f^N(x^{N-1}, u^{N-1})] \\ \tilde{\Phi}_1^2[f^1(x^0, u^0)] & \ldots \tilde{\Phi}_1^{i+1}[f^i(x^{i-1}, u^{i-1})] \ldots & 0 \\ \vdots & & \\ \tilde{\Phi}_{N-1}^N[f^1(x^0, u^0)] \ldots & 0 \qquad \ldots & 0 \end{matrix} \right\|. \tag{4}$$

Теорема 1. *Для того чтобы в области $A$ система [1] была $\Phi^i(x^i)$-инвариантной по $u$, необходимо и достаточно, чтобы для всех $i = 1, \ldots, N$ функции $i$-го столбца матрицы (4) при $x^{i-1} \in A^{i-1}$ не зависели от $u^{i-1}$.*

Доказательство. Элементы $i$-й диагонали матрицы (4), составленные из функций $\tilde{\Phi}_k^i$ с фиксированным верхним индексом $i$, соответствуют элементам опорной функции ([1]) для члена $\Phi^i(x^i)$ последовательности (2). По теореме 1 работы ([1]) их независимость от возмущения является условием инвариантности для $\Phi^i(x^i)$. Объединение этих условий для всех членов последовательности (2) дает теорему 1.

3°. Стационарные задачи. Назовем задачу (1), (2) стационарной, если для всех $i$

$$f^i(x, u) = f(x, u), \quad \Phi^i(x) = \Phi(x), \quad A^i = A.$$

Обозначим $\bar f(x) = f(x, \tilde u)$. Построим систему функций

$$\tilde\Phi_0(x) = \Phi(x), \quad \tilde\Phi_k(x) = \tilde\Phi_{k-1}[\bar f(x)] \quad (k = 1, \dots, n) \tag{5}$$

и матрицу

$$\left\| \frac{\partial \tilde\Phi}{\partial x} \right\| = \left\| \frac{\partial \tilde\Phi_k(x)}{\partial x_l} \right\|_{l=1,\dots,n}^{k=0,\dots,n-1}. \tag{6}$$

Ранг матрицы (6) предположим постоянным в $A$ и назовем рангом инвариантности системы (1) относительно функции $\Phi(x)$. Обозначим $A_f = \{x \mid f(x, u) \in A\}$.

Теорема 2. *Пусть ранг матрицы (6) в $A$ равен $s$. Тогда для того чтобы в $A$ стационарная система (1) была $\Phi(x^i)$-инвариантной по $u$, необходимо и достаточно, чтобы в $A_f$ $s^* = \min\{s, N\}$ функций*

$$\tilde\Phi_k[f(x, u)] \quad (k = 0, \dots, s^* - 1)$$

*не зависели от $u$.*

Доказательство. Для стационарных задач отличные от нуля функции каждой строки матрицы (4) совпадают, поэтому здесь достаточно проверить выполнение условий теоремы 1 для левого столбца матрицы (4), который строится с помощью функций (5) с индексами $k = 0, \dots, N-1$. Из определения этих функций и условия относительно ранга матрицы (6) следует, что независимыми среди них являются первые $s^* = \min\{s, N\}$ функций. Таким образом, для стационарных задач условия теоремы 1 выполнены, если они справедливы для первых $s^*$ элементов левого столбца матрицы (4). Это дает теорему 2.

В силу зависимости между функциями (5) можно в условиях теоремы 2 при $N \geqslant n$ положить $s^* = n$. В качестве частного случая теоремы 2 получаем

Следствие. *Необходимым и достаточным условием инвариантности сильной а, следовательно, и слабой* ([1]) *в линейной задаче*

$$x^{i+1} = Ax^i + bu^i \quad (i = 0, \dots, N-1); \ \Phi(x) = c(x)$$

*является выполнение равенств*

$$(c, A^k b) = (A'^k c, b) = 0 \quad (k = 0, \dots, \min\{n-1, N-1\}).$$

4°. Структура и управляемость инвариантных дискретных систем. Рассмотрим процессы конечной длительности $N \geqslant n$. Обозначим через $C(\bar f, \tilde\Phi)$ класс стационарных дискретных систем, сильно $\tilde\Phi_k(x^i)$-инвариантных относительно каждой из функций (5) и таких, что опорные траектории $\tilde x(x^l) = \{x^l, \tilde x^{l+1}(x^l), \dots, \tilde x^N(x^l)\}$ ($x^l \in A^l$, $0 \leqslant l \leqslant N-1$) для всех систем класса совпадают.

Построим вспомогательную систему

$$x^{i+1} = \omega^i \quad (i = 0, \dots, N-1) \tag{7}$$

и подчиним вектор $\omega$ системе уравнений

$$\tilde\Phi_k(\omega) = \tilde\Phi_{k+1}(x) \quad (k = 0, \dots, s-1). \tag{8}$$

Условия инвариантности теоремы 2 можно записать в форме равенств

$$\tilde\Phi_k[f(x, u)] = \tilde\Phi_{k+1}(x) \quad (k = 0, \dots, s-1), \tag{9}$$

поэтому системе (8) удовлетворяет решение $\tilde\omega = f(x, \tilde u)$. Ранг матрицы (6) есть $s$, поэтому существуют окрестности положительных радиусов для точек $x$ и $\tilde\omega$, где система (8) определяет $s$ компонент вектора $\omega$ (объединим их в вектор $\sigma$) через $x$ и остальные $n - s$ компонент $\omega$ (которые объединим в вектор $w$). Подставив это решение системы (8) в (7), получим порождающую систему

$$x^{i+1} = f_\Pi(x^i, w^i) = \left\| \begin{matrix} w_p^i \\ \sigma_q(x^i, w^i) \end{matrix} \right\|_{\substack{p=1,\dots,n-s \\ q=1,\dots,s}}. \tag{10}$$

Теорема 3. *Класс $C(\bar f, \tilde\Phi)$ порождается системой (10): для любой траектории $\tilde x(x^l)$ существует такая последовательность окрестностей*

$\tilde{\alpha}_{x^l} = \{\tilde{\alpha}^i_{x^l}\}$ $(i = l, \ldots, N)$ *положительного радиуса с центрами в точках* $\tilde{x}^i(x^l)$, *что в* $\tilde{\alpha}_{x^l}$ *любая система класса* $C(\tilde{f}, \tilde{\Phi})$ *может быть получена из системы* (10) *путем наложения на ее возмущающий вектор* $w$ $n - s$ *ограничений вида*

$$w = \varphi(x, u). \tag{11}$$

Доказательство. Правая часть $f$ любой системы класса $C(\tilde{f}, \Phi)$ в $\tilde{\alpha}_{x^l}$ удовлетворяет системе (9), поэтому ее компоненты при $x^i \in \tilde{\alpha}^i_{x^l}$, $f(x^i, u^i) \in \tilde{\alpha}^{i+1}_{x_l}$ связаны с той же зависимостью, что и соответствующие компоненты вектора $\omega$. Отсюда следует, что каждая система класса $C(\tilde{f}, \tilde{\Phi})$ имеет вид (10), (11), где вектор $\varphi$ объединяет компоненты $f$, соответствующие $w$.

Пусть задана последовательность областей $\alpha = \{\alpha^i\}$ и последовательность многообразий $V = \{V^i\}$. Назовем дискретную систему полностью управляемой в $\alpha$ на $V$, если для любых двух точек $x^\nu \in V^\nu \cap \alpha^\nu$ и $x^\mu \in V^\mu \cap \alpha^\mu$ при $\mu > \nu$ существует соединяющая их траектория этой системы.

Теорема 4. а) *Порождающая система полностью управляема в* $\tilde{\alpha}_{x^l}$ *на последовательности многообразий* $\tilde{V}^i_{x^l}$ $(i = l, \ldots, N)$, *определяемых условиями*

$$\tilde{\Phi}_k(x^i) = \tilde{\Phi}_k[\tilde{x}^i(x^l)] \quad (k = 0, \ldots, s-1).$$

б) *В* $\tilde{\alpha}_{x^l}$ *области достижимости порождающей системы содержат области достижимости любой системы класса* $C(\tilde{f}, \Phi)$.

Доказательство теоремы 4 проводится путем построения управлений $w = \{w^i\}$, при которых через любую последовательность точек $x^i \in \tilde{V}^i_{x^l} \cap \tilde{\alpha}^i_{x^l}$ (в том числе через каждую последовательность, являющуюся траекторией системы класса $C(\tilde{f}, \tilde{\Phi})$) проходит траектория системы (10).

Отметим, что в отличие от случая непрерывных систем [4] в порождающей системе для дискретных систем линейными относительно компонент возмущающего вектора являются в общем случае только $n - s$ уравнений.

Утверждения, аналогичные сформулированным в теоремах 3 и 4, могут быть доказаны и для нестационарных задач. Для них ранг инвариантности зависит от момента $i$. Слабо инвариантная система является одновременно сильно инвариантной относительно своей опорной функции $\tilde{V}^i(x^i)$ [1], и ранг инвариантности ее относительно $\tilde{V}^i(x^i)$ равен 1. Отсюда получаем, что множество всех сильно и слабо инвариантных систем охватывается уравнениями вида (10), (11) (при этом в общем случае $s = s_i$).

5°. Аналогия с непрерывными системами. Легко видеть, что условия инвариантности дискретных и непрерывных [3, 4] систем и их структурные свойства [4] по существу аналогичны и отличаются только способом получения функций $\tilde{\Phi}_k$: используемой при построении этих функций в непрерывных системах операции дифференцирования в дискретных системах соответствует операция подстановки (5). Для линейных систем отмеченная аналогия становится полной.

Дифференциальному уравнению, описывающему поведение исследуемой функции в непрерывных системах [3, 4], в дискретных стационарных задачах соответствует дискретное уравнение для значений $J^i = \Phi(x^i)$

$$J^{i+s} = \Psi(J^i, J^{i+1}, \ldots, J^{i+s-1}) \quad (i = 1, \ldots, N-s). \tag{12}$$

Теорема 2а. *Существование уравнения* (12) *является необходимым и достаточным условием* $\Phi(x^i)$*-инвариантности по и стационарной системы* (1).

Доказательство. При выполнении условий теоремы 2 (и, следовательно, теоремы 1) первые $s+1$ функции $i$-го столбца матрицы (4) связаны зависимостью

$$\tilde{\Phi}^{i+s}_s(x^i) = \Psi[\tilde{\Phi}^i_0(x^i), \tilde{\Phi}^{i+1}_1(x^i), \ldots, \tilde{\Phi}^{i+s-1}_{s-1}(x^i)]. \tag{13}$$

Из (3) и независимости функций матрицы (4) от $u$ следует, что на любой возмущенной траектории

$$\tilde{\Phi}_j^{i+j}(x^i) = \tilde{\Phi}_{j-1}^{i+j}(x^{i+1}) = \ldots = \tilde{\Phi}_0^{i+j}(x^{i+j}) = \Phi^{i+j}(x^{i+j}). \quad (14)$$

Подставляя (14) в (13) и полагая $\Phi^{i+j} = \Phi$ (для стационарных задач), получаем уравнение (12). Таким образом, существование уравнения (12) является необходимым условием сильной инвариантности. Но поскольку уравнение (12) не содержит $u$ и $x$, его существование является и достаточным условием сильной инвариантности.

6°. Синтез. Поставим следующую задачу. Задана система

$$x^{i+1} = f(x^i, u^i, v^i), \quad (15)$$

требуется найти корректирующую вектор-функцию

$$v^i = v(x^i, u^i), \quad (16)$$

при которой эта система будет $\Phi(x^i)$-инвариантной по $u$.

Обозначим $\bar{f}(x) = f(x, 0, 0)$, $A_f = \{x \mid f[x, u, v(x, u)] \in A\}$. Построим систему функций (5) и матрицу (6).

Теорема 5. *Пусть ранг матрицы* (6) *в $A$ равен $s$.*

*Тогда для того чтобы вектор-функция* (16) *была корректирующей, необходимо и достаточно, чтобы при $x \in A_f$ она удовлетворяла системе из $s^* = \min\{s, N\}$ определяющих уравнений*

$$\tilde{\Phi}_k[f(x, u, v)] = \tilde{\Phi}_k[f(x, 0, 0)] \quad (k = 0, \ldots, s^* - 1). \quad (17)$$

Теорема 5 непосредственно следует из теоремы 2.

Использование системы определяющих уравнений (17) дает простой конструктивный метод синтеза инвариантных дискретных систем. Число $s^*$ указывает необходимое для решения задачи синтеза число корректирующих цепей. Вид получаемой в результате решения корректирующей вектор-функции $v(x, u)$ предписывает необходимый состав измерений. Метод обеспечивает выполнение условия $v(x, 0) = 0$.

Задача синтеза для нестационарных систем решается аналогично с использованием теоремы 1.

7°. Пример. Пусть $N \geqslant 4$,

$$\begin{gathered} x_1^{i+1} = x_2^i(1 + v_1^i) + u_1^i x_4^i, \quad x_2^{i+1} = v_2^i x_3^i, \\ x_3^{i+1} = u_1^i x_1^i + u_2^i x_4^i, \quad x_4^{i+1} = x_1^i - v_3^i \quad (i = 0, \ldots, N-1); \end{gathered} \quad (18)$$

$$\Phi = \{x_1^i x_2^i\} \quad (i = 1, \ldots, N). \quad (19)$$

Здесь

$$\tilde{\Phi}_0 = x_1x_2, \quad \tilde{\Phi}_1 = x_2x_3, \quad \tilde{\Phi}_2 = x_3x_2, \quad \tilde{\Phi}_3 = x_4x_1 \quad (20)$$

и, например, в $A = \{x \mid x_2x_3x_4 \neq 0\}$ $s = 3$. Из трех уравнений системы (17) получаем

$$v_1 = u_1(x_1x_4^{-1} - x_2^{-1}x_4) + u_2 - 1, \quad v_2 = (u_1x_1x_4^{-1} + u_2)^{-1},$$
$$v_3 = x_1 - (u_1x_4^{-1} + x_1^{-1}u_2)^{-1}.$$

Порождающая система может быть записана в виде

$$\begin{gathered} x_1^{i+1} = x_2^i(x_4^i)^{-1} w^i, \quad x_2^{i+1} = x_3^i x_4^i (w^i)^{-1}, \\ x_3^{i+1} = w^i, \quad x_4^{i+1} = x_1^i x_4^i (w^i)^{-1} \end{gathered} \quad (21)$$

и дает систему, получаемую в результате синтеза, при $w = u_1x_1 + u_2x_4$.

Функции (20) связаны зависимостью $\tilde{\Phi}_3 = \tilde{\Phi}_0(\tilde{\Phi}_1)^{-1}\tilde{\Phi}_2$. Следовательно, уравнение (12) для значений $J^i = x_1^i x_2^i$ последовательности (19) на возмущенных траекториях системы (18) (и системы (21)) имеет здесь вид

$$J^{i+3} = J^i(J^{i+1})^{-1}J^{i+2}.$$

Московский физико-технический институт
г. Долгопрудный Моск. обл.

Поступило
19 IV 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. В. Величенко, ДАН, 185, № 3 (1969). [2] Б. Н. Петров, В сборн. Техническая кибернетика в СССР, М., 1968. [3] Л. И. Розоноэр, Автоматика и телемех. 24, № 6, 7 (1963). [4] В. В. Величенко, ДАН, 200, № 5 (1971).