Доклады Академии наук СССР
1971. Том 201, № 2

УДК 534.2 *МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА*

З. А. ГОЛЬДБЕРГ

О ПАРАМЕТРИЧЕСКОМ УСИЛЕНИИ СТОЯЧИХ ВОЛН В ЖИДКОСТИ

(Представлено академиком М. А. Леонтовичем 28 IV 1971)

При экспериментальном изучении вынужденных колебаний слоя жидкости в ряде работ ([1-3]) были обнаружены, наряду с вынужденными стоячими волнами, гармоники с частотами $k\omega_0$ (k — целое число, ω_0 — частота вынуждающей силы), субгармоники и др. В работах ([4], [5]) рассматривался один из механизмов, порождающий кратные гармоники. Он обусловлен тем, что появляющиеся в процессе нелинейного искажения формы волны высшие гармоники, имея частоты, совпадающие с собственными частотами системы, играют роль резонансной вынуждающей силы. Другим механизмом, ответственным за усиление субгармонических и др. колебаний, может явиться рассматриваемый в настоящей статье параметрический резонанс в системе, изменение параметров которой вызывается вынужденными колебаниями частоты ω_0.

Рассмотрим вынужденные колебания плоскопараллельного слоя жидкости при малых числах Маха и малом поглощении на длине волны. Исходное уравнение для смещения u в переменных Лагранжа при учете первого (приближение линейной акустики для изэнтропических движений) и второго приближений имеет вид ([6])

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial a^2} - \beta \frac{\partial^3 u}{\partial t\, \partial a^2} = -2\varepsilon c^2 \frac{\partial u}{\partial a} \frac{\partial^2 u}{\partial a^2}. \tag{1}$$

Здесь a — пространственная координата Лагранжа, t — время, c — адиабатическая скорость звука, $\beta = \frac{1}{\rho}\left[\frac{4}{3}\eta + \zeta + \varkappa\left(\frac{1}{c_V} - \frac{1}{c_P}\right)\right]$, ρ — плотность жидкости, η и ζ — первый и второй коэффициенты вязкости, $\varkappa$ — коэффициент теплопроводности, c_V и c_P — удельные теплоемкости при постоянном объеме и давлении соответственно, $\varepsilon = 1 + \rho \frac{\partial c^2}{\partial \rho} \Big/ (2c^2)$, производная $\partial c^2 / \partial \rho$ взята при постоянной энтропии.

Установившиеся вынужденные колебания слоя толщины L при граничных условиях

$$u_0(0, t) = A_0 \sin(\omega_0 t - \varphi), \quad u_0(L, t) = 0 \tag{2}$$

в случае $\gamma L \ll 1$, где $\gamma = \beta\omega_0^2 / (2c^3)$, приближенно описываются выражением

$$u_0 = A\left[\sin\frac{\omega_0 (a-L)}{c} \cos\omega_0 t + \operatorname{sh}\gamma(a-L) \cos\frac{\omega_0(a-L)}{c} \sin\omega_0 t\right], \tag{3}$$

причем

$$\operatorname{tg}\varphi = -\left(\operatorname{tg}\frac{\omega_0 L}{c}\right) \Big/ (\operatorname{th}\gamma L), \quad A_0^2 = A^2\left(\sin^2\frac{\omega_0 L}{c} + \operatorname{sh}^2\gamma L\right).$$

Исследуем устойчивость рассматриваемой системы по отношению к колебаниям различных частот, связанных с ω_0 соотношением $\omega_i \pm \omega_k = \omega_0$. Подставив в уравнение (1) $u = u_0 + u_1$, получим для возмущения u_1

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial a^2} - \beta \frac{\partial^3 u_1}{\partial t\, \partial a^2} = -2\varepsilon c^2 \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial a^2} \frac{\partial u_1}{\partial a} + \frac{\partial u_0}{\partial a} \cdot \frac{\partial^2 u_1}{\partial a^2} + \frac{\partial u_1}{\partial a} \frac{\partial^2 u_1}{\partial a^2}\right). \tag{4}$$

Приближенное решение линеаризованного уравнения (4) будем искать в виде

$$u_1 = \sum_{i=1}^{n} [B_i(t) \cos \omega_i t + D_i(t) \sin \omega_i t] \sin \frac{\omega_i}{c}(a - L) + u_2, \tag{5}$$

где в u_2 включены слагаемые на порядок по числу Маха меньшие, чем выписанные явно. Оказывается, что при $n = 2$ укороченные уравнения для коэффициентов B_1, D_2 и D_1, B_2, получаемые после подстановки (5) в (4), независимы друг от друга и приводят к одинаковым результатам для коэффициента α $(B_i, D_i \sim e^{\alpha t})$:

$$\alpha_{1,2} = -\frac{\beta(\omega_1^2 + \omega_2^2)}{4c^2} \pm \sqrt{\frac{\beta^2}{16c^4}(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2 + \left(\frac{\varepsilon A \omega_0}{4c}\right)^2 \omega_1 \omega_2} \tag{6}$$

и отношения коэффициентов $D_2 / B_1 = B_2 / D_1$. В зависимости от начальных и граничных условий наибольшие слагаемые с частотами $\omega_0 + \omega_i$ могут входить в u_2 в виде

$$\sum_{k=1}^{2} [E_k \cos(\omega_0 + \omega_k) t + F_k \sin(\omega_0 + \omega_k) t] (a - L) \cos(\omega_0 + \omega_k) \frac{(a - L)}{c},$$

где

$$E_k = \frac{\varepsilon \omega_0 A}{4c^2} \omega_k B_k, \quad F_k = \frac{\varepsilon \omega_0 A}{4c^2} \omega_k D_k,$$

а также в виде слагаемых, пропорциональных времени. Значения $\alpha > 0$, т. е. усиление стоячих волн частот ω_1 и ω_2, возможны при условии

$$\left(\frac{\varepsilon A \omega_0 c}{2\beta}\right)^2 \frac{1}{\omega_1 \omega_2} > 1. \tag{7}$$

Отметим, что при $\omega_1 > \omega_0$ $(\omega_2 < 0)$ для пары стоячих волн не существует значений $\alpha > 0$. Однако можно показать, что при параметрическом усилении трех волн $(n = 3)$ частот ω_1, ω_2, $\omega_3 = \omega_0 + \omega_1$, значения $\alpha > 0$ существуют при условии

$$\left(\frac{\varepsilon A \omega_0 c}{\beta}\right)^2 \frac{1}{2\omega_2 \omega_3} > 1.$$

Полное решение конкретной задачи необходимо строить с учетом соответствующих начальных и граничных условий. Не останавливаясь здесь на этом, заметим лишь, что выписанное выше решение для u_1 будет удовлетворять в первом приближении нулевым граничным условиям при

$$\sin \frac{\omega_i}{c} L = 0.$$

Естественно ожидать, что параметрически усиливаемые стоячие волны должны оказывать влияние не вынужденную стоячую волну. Чтобы рассмотреть это обратное воздействие, необходимо в уравнении (4) учесть нелинейный член, который порождает слагаемые с комбинационной частотой $\omega_1 + \omega_2 = \omega_0$. Можно показать, что в результате этого обратного влияния амплитуда вынужденного колебания уменьшается. Поэтому естественно ожидать установления в системе режима со стационарными амплитудами. Соответствующее этому режиму решение уравнения (1) при $n = 2$ имеет вид

$$u = A_1 \sin \frac{\omega_0 (a - L)}{c} \cos \omega_0 t + A \operatorname{sh} \gamma (a - L) \cos \frac{\omega_0 (a - L)}{c} \sin(\omega_0 t) +$$
$$+ B \sin \frac{\omega_1 (a - L)}{c} \cos \omega_1 t + D \sin \frac{\omega_2 (a - L)}{c} \sin \omega_2 t + u_2, \tag{8}$$

где

$$A_1 = \frac{2\beta\sqrt{\omega_1\omega_2}}{\varepsilon c\omega_0}, \quad D^2 = \pm\frac{2\beta\omega_0^2\omega_1(A - A_1)}{\varepsilon c\omega_2^2\sqrt{\omega_1\omega_2}}, \quad B = \pm\frac{\omega_2}{\omega_1}\sqrt{\frac{\omega_2}{\omega_1}}\,D. \tag{9}$$

Если считать для определенности $A > 0$, то тогда соотношения (9) имеют смысл только при верхнем знаке, причем при условии $A > A_1$, сводящемся к (7), необходимом для существования явления параметрического усиления. При $\sin\frac{\omega_i L}{c} = 0$ решение (8) будет удовлетворять граничным условиям (2), если

$$u_2(0, t) = u_2(L, t) = 0.$$

Нулевым же граничным условиям для u_2 удается удовлетворить в случае $L \gg \lambda_i$, где λ_i — длина волны.

Если в решении (8) расшифровать u_2, то окажется, что к стоячим волнам с частотами ω_1 и ω_2 во втором приближении добавляются стоячие волны с частотами $2\omega_0$, $2\omega_1$, $2\omega_2$, $\omega_0 + \omega_1$, $\omega_0 + \omega_2$, $|\omega_2 - \omega_1|$.

Может показаться странным, что согласно (9) бóльшим значениям β соответствуют бóльшие амплитуды B и D. Дело в том, что чем сильнее проявляются диссипативные эффекты, тем слабее обратное влияние, т. е. тем больше должны быть амплитуды B и D, обеспечивающие режим со стационарными амплитудами.

Отметим еще, что полученные результаты можно обобщить на случай стоячих магнитозвуковых волн в плазме в перпендикулярном магнитном поле, подобно тому как это было сделано ранее для бегущих волн конечной амплитуды [7].

Автор выражает глубокую благодарность Л. М. Лямшеву и участникам руководимого им семинара за обсуждение результатов.

Казахский государственный университет
им. С. М. Кирова
Алма-Ата

Поступило
26 IV 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] A. Korpel, R. Adler, Appl. Phys. Lett., 7, 4, 106 (1965). [2] L. Adler, M. A. Breazeale, Naturwiss., 55, 8, 385 (1968). [3] Г. Д. Михайлов, ДАН, 188, № 3, 562 (1969). [4] Л. К. Зарембо, Акустич. журн., 13, № 2, 298 (1967). [5] Л. К. Зарембо, Акустич. журн., 16, № 1, 58 (1970). [6] Л. К. Зарембо, В. А. Красильников, Введение в нелинейную акустику, «Наука», 1966. [7] З. А. Гольдберг, ЖЭТФ, 42, № 1, 253 (1962).