

В. Л. ДАНИЛОВ, Р. М. КАЦ

МЕТОД ОДНОРОДНЫХ ЗОН РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ МНОГОМЕРНЫХ ЗАДАЧ МАССОПЕРЕНОСА В ПОРИСТЫХ СРЕДАХ

(Представлено академиком П. Я. Кочиной 26 IV 1971)

1. Предлагаемый метод основан на зональной линеаризации квазилинейного уравнения сохранения массы суммарного потока между выбранными поверхностями уровня (равной насыщенности или концентрации). Тогда форма функции осредненного давления может быть выбрана наперед, после чего определение динамики поля поверхностей уровня сводится к задаче Коши для системы интегро-дифференциальных уравнений (и.д.у.) в частных производных. Метод однородных зон (м.о.з.) является развитием однозонной схемы, описанной в ⁽¹⁾, а методы решения системы и.д.у. — обобщением методов, изложенных в ⁽²⁻⁵⁾.

Ниже применение м.о.з. и его сходимость иллюстрируются на двумерной задаче двухфазной фильтрации.

2. В ⁽⁶⁾ уравнения изотермической фильтрации двух несжимаемых не смешивающихся жидкостей в изотропной недеформируемой пористой среде приведены к виду

$$\nabla \cdot (K \nabla \Phi_i) = \nabla \cdot [(K - K_i) \nabla (p_k - \Delta \rho \cdot gh)]; \quad (1)$$

$$m \partial s / \partial t = (-1)^i \nabla \cdot (K_i \nabla \Phi_i), \quad i = 1, 2; \quad (2)$$

$$K = K_1 + K_2, \quad K_i = k f_i(s) / \mu_i, \quad \Phi_i = p_i + \rho_i gh, \quad \Delta \rho = \rho_2 - \rho_1; \quad (3)$$

$$s_1 + s_2 = 1 \quad (s_2 \equiv s); \quad \Phi_1 - \Phi_2 = p_k - \Delta \rho \cdot gh. \quad (4)$$

Индексы 1 и 2 относятся соответственно к вытесняемой и вытесняющей жидкостям, Φ_i — напор; s_i — насыщенность порового объема i -й жидкостью; p_i — гидродинамическое фазовое давление, m — местная открытая пористость, μ_i — абсолютная вязкость, k — абсолютная проницаемость (далее $k = \text{const}$), $p_k(s)$ — капиллярное давление; $f_i(s)$ — фазовая (относительная) проницаемость; ρ_i — плотность i -й жидкости, g — ускорение силы тяжести; h — превышение точки (x, y, z) над плоскостью нулевого гравитационного потенциала, т. е. линейная функция координат.

Введем осредненное давление p ⁽¹⁰⁾:

$$Kp = K_1 p_1 + K_2 p_2. \quad (5)$$

С учетом (3) и (4) имеем

$$p_1 = p + K_2 K^{-1} p_k, \quad p_2 = p - K_1 K^{-1} p_k; \quad (6)$$

$$\Phi_1 = p + K_2 K^{-1} p_k + \rho_1 gh, \quad \Phi_2 = p - K_1 K^{-1} p_k + \rho_2 gh.$$

С помощью (6) уравнение (1) при $K > 0$ в области течения можно привести к виду

$$\nabla^2 p = -K^{-1} [(\nabla K, \nabla p) + \nabla \cdot (K p_k \nabla K_2 K^{-1}) + (\nabla L, \nabla h)], \quad (7)$$

$$L = g(K_1 \rho_1 + K_2 \rho_2).$$

Если в части области течения D движется лишь одна из фаз, то либо

$K = K_1(\bar{s})$ либо $K = K_2(s)$ постоянные *. Тогда $L = \text{const}$ и (7) вырождается в уравнение Лапласа $\nabla^2 p = 0$.

Уравнение (2) при $i = 2$, используя (3), (4), преобразуем к виду

$$m \partial s / \partial t = -(\nabla F, \mathbf{v}_\Phi) + \nabla \cdot [K_1 F \nabla (p_k - \Delta \rho \cdot gh)], \quad (8)$$

где $\mathbf{v}_\Phi$ — вектор суммарной скорости фильтрации, а F — функция Леверетта

$$\mathbf{v}_\Phi = \mathbf{v}_{\Phi 1} + \mathbf{v}_{\Phi 2} = -K_1 \nabla \Phi_1 - K_2 \nabla \Phi_2, \quad F = K_2 K^{-1}. \quad (9)$$

3. Рассмотрим далее плоскую задачу (обобщение на трехмерный случай является очевидным). Пусть для упрощения рассуждений область D занимает всю плоскость. В начальный момент $t = 0$ в зоне D_0 внутри замкнутого контура Γ_0 $s = \underline{s}$, а в зоне D_{N+1} вне охватывающего Γ_0 замкнутого контура Γ_N $s = \bar{s}$. Между Γ_0 и Γ_N лежит переходная зона D_T , в которой $\underline{s} < s < \bar{s}$ и подвижны обе фазы. Учитывая, что границы Γ_0 и Γ_N совпадают соответственно с изолиниями $s_0 = \underline{s}$ и $s_N = \bar{s}$, разобьем D_T на $(N - 1)$ подобластей D_j линиями равной насыщенности (изосатами) $s_0 < s_1 < \dots < s_j < \dots < s_N$. Осредним фильтрационное сопротивление в каждой из зон D_j , полагая K_1, K_2 и, следовательно, K постоянными: $K_{1,j} = c_{1,j}$, $K_{2,j} = c_{2,j}$, $K_j = c_{1,j} + c_{2,j}$ ($K_j = K(\tilde{s}_j)$, $s_{j-1} < \tilde{s}_j < s_j$).

Из (7) следует, что тогда функция p будет удовлетворять в D_j уравнению Лапласа

$$\nabla^2 p = 0. \quad (10)$$

На Γ_j должны выполняться условия непрерывности суммарного потока $\mathbf{v}_\Phi$ и фазовых давлений p_1 и p_2 , которые легко привести к форме

$$c_1 \partial p^+ / \partial n_j - c_{j+1} \partial p^- / \partial n_j = (\bar{L}_{j+1} - \bar{L}_j) \partial h / \partial n_j, \quad \bar{L}_j = g(c_{1,j} p_1 + c_{2,j} p_2); \quad (11)$$

$$p^+ - p^- = -(c_{2,j} c_j^{-1} - c_{2,j+1} c_{j+1}^{-1}) p_{k\Gamma_j}; \quad (12)$$

$$p^+ - p^- = (c_{1,j} c_j^{-1} - c_{1,j+1} c_{j+1}^{-1}) p_{k\Gamma_j} \quad (j = 0, 1, \dots, N). \quad (13)$$

Здесь n_j — внутренняя нормаль к Γ_j , индексы $+$ и $-$ означают предельные значения на Γ_j при стремлении к нему изнутри и снаружи. Так как $c_{1,j} c_j^{-1} = 1 - c_{2,j} c_j^{-1}$, то соотношения (12) и (13) эквивалентны.

4. Исходя из (10) — (12), естественно отыскивать p в форме

$$p = \Phi + \sum_{j=0}^N (V_j + W_j), \quad V_j = \int_{\Gamma_j} \bar{\rho}_j(\xi, \eta) \ln r^{-1}(x, y; \xi, \eta) dl_j, \\ W_j = \int_{\Gamma_j} \kappa_j(\xi, \eta) \frac{\partial}{\partial n_j} \ln r^{-1}(x, y, \xi, \eta) dl_j, \quad (14)$$

где Φ — потенциал внешнего поля, включающий все заданные особенности в D_0 и D_{N+1} (например, источники и стоки) **; V_j и W_j соответственно потенциалы простого и двойного логарифмического слоя с плотностями $\bar{\rho}_j$ и κ_j , непрерывно распределенными по Γ_j ; $(x, y) \in D$, $(\xi, \eta) \in \Gamma_{j,ij}$ — дуговая абсцисса точки (ξ, η) , n_j' — внутренняя нормаль к Γ_j в (ξ, η) , $r = [(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2]^{1/2}$.

Уравнению (10) функция p из (14) удовлетворяет по построению. Для выполнения условий (12) должны иметь место соотношения

$$\kappa_j = -(2\pi)^{-1} (c_{2,j} c_j^{-1} - c_{2,j+1} c_{j+1}^{-1}) p_{k\Gamma_j} \quad (j = 0, 1, \dots, N). \quad (15)$$

Так как $p_{k\Gamma_j} = p_k(s_j)$, то κ_j постоянны.

* Здесь s и $\bar{s}$ — нижний и верхний пределы насыщенности s , при которых соответственно $K_2(s) = 0$ и $K_1(\bar{s}) = 0$.

** Так, при стоке с расходом $Q(t)$ в точке (x', y') области D_0 $\Phi = Q(t) (2\pi c_0 H)^{-1} \times \ln [(x' - x)^2 + (y' - y)^2]^{-1/2}$, где H — постоянная мощность пласта.

Используя (14), условия (11) преобразуем к виду

$$\bar{\rho}_q - \frac{\lambda_{q,q+1}}{\pi} \sum_{j=0}^N \left(\frac{\partial V_j}{\partial n_q} + \frac{\partial W_j}{\partial n_q} \right) = \frac{\lambda_{q,q+1}}{\pi} \frac{\partial \varphi}{\partial n_q} + \frac{\delta_{q,q+1}}{\pi} \frac{\partial h}{\partial n_q}, \quad (16)$$

$$\lambda_{q,q+1} = (c_q - c_{q+1} + 1)(c_q + c_{q+1})^{-1},$$

$$\delta_{q,q+1} = (\tilde{L}_q - \tilde{L}_{q+1})(c_q + c_{q+1})^{-1} \quad (q = 0, 1, \dots, N).$$

В силу (6) и (9) $\frac{\partial p}{\partial n} = - \left[v_{\Phi n} K^{-1} + p_k \frac{\partial}{\partial n} (K_2 K^{-1}) + L K^{-1} \frac{\partial h}{\partial n} \right]$.

Отсюда с учетом осреднения в зонах D_j имеем

$$\frac{\partial p^+}{\partial n_q} = - (v_{\Phi n_q} c_q^{-1} + \tilde{L}_q c_q^{-1} \frac{\partial h}{\partial n_q}), \quad \frac{\partial p^-}{\partial n_q} = - (v_{\Phi n_q} c_{q+1}^{-1} + \tilde{L}_{q+1} c_{q+1}^{-1} \frac{\partial h}{\partial n_q}); \quad \bar{\rho}_q = \pi^{-1} (-\lambda_{q,q+1} c_{q+1}^{-1} v_{\Phi n_q} + \gamma_{q,q+1} \frac{\partial h}{\partial n_q}); \quad (17)$$

$$c_{q,q+1} = 2c_q c_{q+1} (c_q + c_{q+1})^{-1}, \quad \gamma_{q,q+1} = 0,5 (\tilde{L}_q c_q^{-1} - \tilde{L}_{q+1} c_{q+1}^{-1}). \quad (18)$$

В случае $\kappa_q = \text{const}$, как известно (7), $W_q = 2\pi\kappa_q$ при точке (x, y) внутри Γ_q и $W_q = 0$ при (x, y) вне Γ_q . Отсюда следует, что $\partial W_j / \partial n_q = 0$. Учитывая это и подставляя (17) в (16), получаем систему $(N+1)$ интегральных уравнений Фредгольма II рода относительно $v_{\Phi n_q}$ на Γ_q :

$$v_{\Phi n_q} - c_{q,q+1} \pi^{-1} \sum_{j=0}^N c_{j,j+1}^{-1} \int_{\Gamma_j} (\lambda_{j,j+1} v_{\Phi n_j} - a_{j,j+1} \frac{\partial h}{\partial n_j}) \frac{\partial}{\partial n_q} \ln r_{jq}^{-1} dl_j = -c_{q,q+1} (\frac{\partial \varphi}{\partial n_q} + b_{q,q+1} \frac{\partial h}{\partial n_q}) \quad (q = 0, 1, \dots, N); \quad (19)$$

$$a_{j,j+1} = c_{j,j+1} \gamma_{j,j+1}, \quad b_{j,j+1} = \lambda_{j,j+1}^{-1} (\delta_{j,j+1} - \gamma_{j,j+1}). \quad (20)$$

5. Используя то, что на Γ_q $s = \text{const}$, можно уравнение (8) привести к виду

$$m \frac{\partial s}{\partial t} = -F'(s) v_{\Phi n} \frac{\partial s}{\partial n} - g \Delta \rho U \left(\frac{\partial h}{\partial n} \right) \left(\frac{\partial s}{\partial n} \right) + \nabla (V \nabla s), \quad (21)$$

$U(s) = d(K, F) / ds = d(K_1 K_2 K^{-1}) / ds$, $V(s) = K_1 F p_k' = K_1 K_2 K^{-1} dp_k / ds$ — известные функции s . Выразим отсюда $v_{\Phi n}$ на Γ_q :

$$v_{\Phi n_q} = - [F'(s_q)]^{-1} \left\{ m \left(\frac{\partial s_q}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial s_q}{\partial n_q} \right) + g \Delta \rho U(s_q) \frac{\partial h}{\partial n_q} - \nabla (V \nabla s)_{\Gamma_q} \left(\frac{\partial s_q}{\partial n_q} \right)^{-1} \right\}. \quad (22)$$

Выражение (22) теряет смысл при $q = N$, поскольку $F'(s_N) = 0$. Подставляя (22) для $q = 0, 1, \dots, N-1$ в систему (19), получаем систему и.д.у. относительно $(N+1)$ искоемых функций $s_q(x, y, t)$ и $v_{\Phi n_N}$, для которой ставится задача Коши при известных $s_q(x, y, 0) = s_q^0(x, y)$.

6. Методы численного и графоаналитического решения этой задачи описаны в (2), а аналитического — в (3-5). Обобщение их на случай N границ не вызывает принципиальных затруднений.

7. В качестве примера рассмотрим движение двухфазной жидкости к одиночной скважине в неограниченном пласте при первоначально прямолинейной границе раздела зон с предельными насыщенностями s и $\bar{s}$. Для упрощения примем $p_k = 0$, $h = \text{const}$ (схема Бакли — Леверетта). Уравнения движения изосат Γ_q в полярных координатах $r = \psi(\theta, t)$ (рис. 1), исходя из (22), перепишем в безразмерном виде (далее $\chi = \psi^2$):

$$\chi_{qt}(\theta, t) = F'(s_q) u_q(\theta, t), \quad (23)$$

где $u_q(\theta, t)$ — решение системы (19), принимающей в полярных координатах вид

$$u_q(\theta, t) - c_{q,q+1} \pi^{-1} \sum_{j=0}^N \lambda_{j,j+1} c_{j,j+1}^{-1} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} u_j(v, t) R_{jq}(\theta, v, t) dv = -c_0 c_{q,q+1}, \quad (24)$$

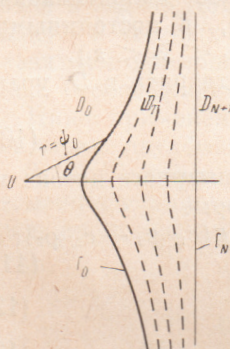


Рис. 1

$$R_{jq} = \frac{\psi_q^2(\theta, t) - \psi_q(\theta, t) \psi_j(v, t) \cos(\theta - v) + \psi_{q\theta}(\theta, t) \psi_j(v, t) \sin(\theta - v)}{\psi_q^2(\theta, t) - 2\psi_q(\theta, t) \psi_j(v, t) \cos(\theta - v) + \psi_j^2(v, t)}.$$

Здесь нижние индексы t и θ при ψ означают частные производные по этим переменным. Связь размерных величин ψ^0 , t^0 с безразмерными такова: $\psi = \psi^0 a^{-1}$, $t = Qt^0 (\pi m H a^2)^{-1}$, где a — расстояние между скважиной и Γ_N , $Q = \text{const}$ — дебит скважины, H — постоянная мощность пласта.

Решение задачи Коши для системы (23), (24) отыскивалось в виде рядов по степеням t аналогично ⁽³⁾:

$$\chi_q(\theta, t) = \chi_q(\theta, 0) + \chi_{qt}(\theta, 0)t + \frac{1}{2}\chi_{qtt}(\theta, 0)t^2 + \dots \quad (25)$$

Начальные положения всех изосат совпадают, т. е. зона D_T при $t = 0$ вырождена в прямую $\chi_q(\theta, 0) = \cos^{-2} \theta$. Определялись два коэффициента рядов (25)

$$\begin{aligned} \chi_{qt}(\theta, 0) &= -F'(s_q)(1 - \lambda_{0, N+1}), \quad \lambda_{0, N+1} = (c_0 - c_{N+1})(c_0 + c_{N+1})^{-1}, \\ \chi_{qtt}(\theta, 0) &= F'(s_q)u_{qt}(\theta, 0), \end{aligned} \quad (26)$$

где $u_{qt}(\theta, 0)$ — решение системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} u_{qt}(\theta, 0) + c_{q, q+1} \sum_{j=0}^N \text{sign}(j-q) \lambda_{j, j+1} c_{j, j+1}^{-1} u_{jt}(\theta, 0) &= 0,25 \lambda_{q, q+1} u_{qt}(\theta, 0) \times \\ &\times \chi_{qt}(\theta, 0) \cos 2\theta + c_{q, q+1} \sum_{j=0}^N \lambda_{j, j+1} c_{j, j+1}^{-1} \{u_{jt}(\theta, 0) \chi_{qt}(\theta, 0) [0,5 \cos^2 \theta - \\ &- \cos^2 \theta \cos 2\theta - 0,5 \text{sign}(j-q) \cos^2 \theta] + \\ &+ u_{jt}(\theta, 0) \chi_{jt}(\theta, 0) [0,5 \cos 2\theta + 0,25 \cos 4\theta + 0,5 \text{sign}(j-q) \cos^2 \theta]\}. \end{aligned} \quad (27)$$

Штрих у суммы означает пропуск члена с $j = q$, $\text{sign}(j-q)$ — знак разности $(j-q)$, функция $\chi_{qt}(\theta, 0)$ представляется из (26).

С момента $t = 0$ образуется разрыв насыщенности на фронтовой изосате такой же, как и в одномерном решении Бакли — Леверетта ⁽⁸⁾. Были проведены расчеты для $\mu_1 \mu_2^{-1} = 10$. Фазовые проницаемости принимались в виде $f_1(s) = (1 - s)^2$, $f_2(s) = s^2$, причем $s = 0$, $\bar{s} = 1$. Значение фронтовой насыщенности при этом $s_\Phi = 0,3015$. Средние значения $\bar{s}_j$ вычислялись из решения одномерной задачи Бакли — Леверетта ⁽⁸⁾ на соответствующих интервалах насыщенности для $s_\Phi < s < 1$.

Сходимость метода иллюстрируется сопоставлением времен подхода s_Φ к скважине для одно-, двух и четырехзонной схем аппроксимации области D_T , разных соответственно 0,2602; 0,2638 и 0,2647.

8. М.о.з. без затруднений распространяется на случай фильтрации двух смешивающихся разноразностных жидкостей с различными плотностями. Наиболее простой путь — использование аналогии между уравнениями указанного течения и уравнениями, рассмотренными выше ⁽⁸⁾.

Всесоюзный нефтегазовый
научно-исследовательский институт
Москва

Поступило
24 IV 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ В. Л. Данилов, Изв. Казанск. фил. АН СССР, сер. физ.-матем. и техн. наук, в. 13 (1959). ² В. Л. Данилов, Там же, в. 11 (1957). ³ В. Л. Данилов, Изв. АН СССР, ОТН, Мех. и машиностр., № 1 (1962). ⁴ Ю. С. Абрамов, Р. М. Кац, Изв. АН СССР, Мех. жидкости и газа, № 6 (1967). ⁵ Р. М. Кац, Там же, № 5 (1967). ⁶ В. Л. Данилов, А. Н. Коновалов, С. И. Якуба, ДАН, 183, № 2 (1968). ⁷ А. Н. Тихонов, А. А. Самарский, Уравнения математической физики, М., 1953. ⁸ И. А. Чарный, Подземная гидрогазодинамика, М., 1963. ⁹ R. V. Lantz, Soc. Petr. Eng. J., 10, 2 (1970). ¹⁰ А. Бан и др., Влияние свойств горных пород на движение в них жидкости, М., 1962.