Доклады Академии наук СССР
1972. Том 202, № 4

УДК 513.831 *МАТЕМАТИКА*

В. К. БЕЛЬНОВ

О СВОБОДНЫХ АБЕЛЕВЫХ МЕТРИЗУЕМЫХ ГРУППАХ

(Представлено академиком П. С. Александровым 25 VI 1971)

В заметке рассматриваются свободные абелевы метризуемые группы с недискретной топологией. Пусть G — свободная абелева метризуемая группа и X — подмножество группы G, состоящее из системы линейно независимых образующих группы G и элемента 0. Будем называть X базой группы G. (Ясно, что базу в группе можно, вообще говоря, выбрать многими различными способами.) Пусть далее, точка $x \in G$, причем $x \neq 0$. Тогда в группе G содержится свободная циклическая подгруппа $G_x = \{x\}$, порожденная элементом x. Группу G_x, рассматриваемую в топологии, индуцированной топологией группы G, будем называть слоем группы G в точке x. Слои над различными элементами группы G могут быть топологически неизоморфны.

Теорема 1. *Если в свободной абелевой метризуемой группе G существует компактная база X, то группа G является множеством 1-й категории.*

Теорема 2. *Пусть G — свободная абелева группа, X — ее база, ρ_0 — некоторая метрика на множестве X, индуцирующая на X недискретную топологию, и пусть ρ — инвариантная метрика на группе G, совпадающая на X с метрикой ρ_0 и являющаяся максимальной инвариантной метрикой группы G с этим свойством* (1).

Тогда группа G в топологии, индуцированной метрикой ρ, является множеством 1-й категории.

По-видимому, утверждения теорем 1 и 2 можно распространить на более широкие классы свободных абелевых метризуемых групп. Было бы интересно выяснить, любая ли абелева свободная метризуемая группа является множеством 1-й категории.

Теорема 3. *Не существует свободных абелевых метризуемых групп с недискретной топологией, которые являлись бы абсолютными G_δ.*

Доказательство. Допустим противное и пусть G — свободная абелева метризуемая группа с недискретной топологией, которая является абсолютной G_δ. Тогда группа G полна относительно некоторой инвариантной метрики ρ (2). Так как топология группы G недискретна, существует последовательность точек $\{a_n\}$, $a_n \neq 0$, $n = 1, 2, \ldots$, такая, что $\rho(a_{n+1}, 0) < \frac{1}{n}\rho(a_n, 0)$, $n = 1, 2, \ldots$ Рассмотрим формальные суммы вида $\sum_{i=1}^{\infty} n_i a_i$, где целые числа n_i выбираются таким образом, чтобы последовательность $\{x_k\}$, где $x_k = \sum_{i=1}^{k} n_i a_i$, $k = 1, 2, \ldots$, была фундаментальной в метрике ρ. В силу того, что группа G полна относительно метрики ρ, последовательность $\{x_k\}$, $k = 1, 2, \ldots$, сходится к некоторому элементу $x \in G$. Будем это формально записывать как

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} n_i a_i. \tag{1}$$

Ясно, что множество элементов группы G, представимых в виде (1), образует группу. Эта группа, будем ее обозначать G_0, имеет мощность $\mathfrak{c}$, так как уже множество элементов $x \in G$, которые представляются в виде (1) с коэффициентами $n_i = 0, 1$, имеет мощность $\mathfrak{c}$.

Далее применяем известную схему доказательства того, что полное прямое произведение счетного числа бесконечных циклических групп не является свободной абелевой группой ([3]). Рассмотрим подгруппу $\overline{G}_0$ группы G_0, образованную всеми элементами x, коэффициенты n_i которых в разложении (1) обладают следующим свойством: для любого натурального k все числа n_i, начиная с некоторого, делятся на 2^k. Группа $\overline{G}_0$ имеет мощность $\mathfrak{c}$, так как уже множество элементов x, которые представляются в виде (1) с коэффициентами $n_i = 0, 2^i$, имеет мощность $\mathfrak{c}$, как это легко следует из неравенств $\rho(a_{n+1}, 0) < \frac{1}{n}\rho(a_n, 0)$, $n = 1, 2, \ldots$ Рассмотрим подгруппу G_0' группы $\overline{G}_0$, образованную всеми элементами $x \in G_0$, коэффициенты n_i которых в разложении (1) все, за исключением конечного числа, равны 0. Ясно, что группа G_0' счетна. Далее, пусть $2\overline{G}_0$ — подгруппа группы $\overline{G}_0$, состоящая из всех элементов группы $\overline{G}_0$, которые представляются в виде $x = 2y$, где $y \in \overline{G}_0$. Так как группа $\overline{G}_0$ является свободной абелевой группой мощности $\mathfrak{c}$, фактор-группа $A = \overline{G}_0 / (2\overline{G}_0)$ имеет мощность $\mathfrak{c}$. С другой стороны, как легко видеть, любой элемент $g \in A$ является образом некоторого элемента $x \in G_0'$, и, таким образом, группа A счетна. Полученное противоречие доказывает теорему.

Теорема 4. *Пусть X — метрическое пространство бесконечной мощности и G — свободная абелева группа с базой X. (0 группы G совпадает с некоторым элементом $x_0 \in X$, который фиксирован.)*

Тогда существует континуум линейно упорядоченных множеств $M_s = \{\mu_s^\alpha, 0 < \alpha < 1\}$, $s \in S$, $|S| = \mathfrak{c}$, метризуемых топологий на группе G, совместимых с групповой структурой G и таких, что:

1) *каждая топология μ_s^α, $\alpha \in (0, 1)$, $s \in S$, индуцирует на множестве X его первоначальную топологию;*

2) *$\mu_s^{\alpha_1} < \mu_s^{\alpha_2}$, если $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < 1$, $s \in S$;*

3) *каковы бы ни были $\alpha_1, \alpha_2 \in (0, 1)$, топологии $\mu_{s_1}^{\alpha_1}$ и $\mu_{s_2}^{\alpha_2}$ попарно не сравнимы, если $s_1 \neq s_2$;*

4) *для каждой точки $x \in G$ слой G_x группы G в точке x дискретен для любой топологии μ_s^α, $\alpha \in (0, 1)$, $s \in S$.*

Для доказательства этой теоремы нам понадобится

Предложение 1. *Существует такое множество S бесконечных последовательностей из 0 и 1, что:*

1) *для любых $s_1, s_2 \in S$, $s_1 \neq s_2$, $s_1 = a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, $s_2 = b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$, можно выбрать такие возрастающие последовательности $\{n_i\}$ и $\{m_i\}$, $i = 1, 2, \ldots$, натуральных чисел, что для каждого числа n_i, $a_{n_i} = 0$ и $b_{n_i} = 1$, и для каждого числа m_i, $a_{m_i} = 1$ и $b_{m_i} = 0$;*

2) *множество S имеет мощность $\mathfrak{c}$.*

Доказательство теоремы 4. Пусть S — множество, о существовании которого говорится в предложении 1. Для каждого $s \in S$, $s = a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, через $s(n)$ будем обозначать n-й элемент этой последовательности a_n. Рассмотрим два случая.

I. Пространство X дискретно. Пусть $A = \{x_n\}$, $x_n \in X$, $n = 1, 2, \ldots$, — такое счетное подмножество пространства X, что $x_i \neq x_j \neq x_0$ при $i \neq j$ ($x_0 \in X$ по условию является 0 группы G). Определим на множестве A метрики ρ_s^r, где r пробегает рациональные числа интервала $(0, 1)$, $s \in S$, следующим образом:

а) $\rho_s^r(x_n, x_{n+1}) = 1/n^{2-r+(-1)^{s(n)}}$, $n = 1, 2, \ldots$;

б) $\rho_s^r(x_n, x_{n+i}) = \sum_{k=0}^{i-1} \rho_s^r(x_{n+k}, x_{n+k+1})$, $i > 1$, $n = 1, 2, \ldots$

Построенные на множестве A метрики $\rho_s{}^r$ можно продолжать до некоторых метрик $\rho_s{}^r$, определенных уже на всем пространстве X и индуцирующих на нем дискретную топологию ([4]).

II. Пространство X недискретно. Тогда существует последовательность точек $\{x_n\}$, $x_n \in X$, $x_n \neq x_m$ при $n \neq m$, $n, m = 1, 2, \dots$, сходящаяся к некоторой точке $\tilde{x} \in X$. Можно, очевидно, считать, что $x_n \neq \tilde{x}$ для любого n. Определим на компакте $\bar{A} = \{x_n\} \cup \tilde{x}$ метрики $\rho_s{}^r$, где r пробегает рациональные числа интервала $(0, 1)$, $s \in S$, следующим образом:

$$\bar{\text{а}})\quad \rho_s^r(x_n, \tilde{x}) = 1/n^{2-r+(-1)^{s(n)}}, \quad n = 1, 2, \dots;$$

$$\bar{\text{б}})\quad \rho_s^r(x_n, x_m) = |\rho_s^r(x_n, \tilde{x}) - \rho_s^r(x_m, \tilde{x})|, \quad 1 \leqslant n, m < +\infty.$$

Построенные на компакте $\bar{A}$ метрики $\rho_s{}^r$ можно продолжить до некоторых метрик $\rho_s{}^r$, определенных уже на всем пространстве X и согласующихся с топологией пространства X ([4]).

Таким образом, в обоих случаях мы построили на пространстве X множество метрик $\rho_s{}^r$, где r пробегает рациональные числа интервала $(0, 1)$, $s \in S$, удовлетворяющих условиям а), б) в 1-м случае и условиям $\bar{\text{а}}$), $\bar{\text{б}}$) во 2-м случае.

Как показано в ([1]), любую метрику ρ на множестве X можно продолжить до такой инвариантной метрики $\bar{\rho}$ на группе G, что эта метрика индуцирует на базе X метрику ρ и является максимальной инвариантной метрикой группы G с таким свойством. Продолжим метрики $\rho_s{}^r$, определенные на базе X, до соответствующих максимальных инвариантных метрик $\bar{\rho}_s{}^r$, определенных на группе G. Топологии на группе G, индуцируемые метриками $\bar{\rho}_s{}^r$, будем обозначать соответственно через $\nu_s{}^r$. Определим для каждого действительного числа $\alpha \in (0, 1)$ и любого $s \in S$ топологию $\mu_s^\alpha = \bigcup\limits_{r<\alpha} \nu_s^r$. Ясно, что так определенные топологии метризуемы и согласуются с групповой структурой G. Можно показать, что топологии $\mu_s{}^\alpha$, $\alpha \in (0, 1)$, $s \in S$, удовлетворяют всем условиям теоремы. Проверим, например, условие 2). Достаточно рассмотреть случай, когда $\alpha_1 = r_1$ и $\alpha_2 = r_2$ — рациональные числа интервала $(0, 1)$, $0 < r_1 < r_2 < 1$. Покажем, что $\mu_{s_0}{}^{r_1} < \mu_{s_0}{}^{r_2}$ для любого $s_0 \in S$.

I'. Пространство X дискретно. Пусть $n_{s_0}{}^{r_2} = [n^{2-r_2+(-1)^{s_0(n)}}]$, где $[\ \ ]$ означает целую часть числа. Обозначим $y_n = n_{s_0}{}^{r_2}(x_n - x_{n+1})$, $x_n, x_{n+1} \in A$, $n = 1, 2, \dots$ Нетрудно показать, что последовательность $\{y_n\}$ сходится к 0 в каждой топологии $\nu_{s_0}{}^r$ с $r_2 > r > 0$ и расходится в любой топологии $\nu_{s_0}{}^r$ с $r_2 \leqslant r < 1$. Отсюда следует, что последовательность $\{y_n\}$ сходится к 0 в топологии $\mu_{s_0}{}^{r_1}$ и расходится в топологии $\mu_{s_0}{}^{r_2}$, а так как по построению $\mu_{s_0}{}^{r_1} \leqslant \mu_{s_0}{}^{r_2}$, имеем строгое неравенство $\mu_{s_0}{}^{r_1} < \mu_{s_0}{}^{r_2}$.

II'. Пространство X недискретно. Доказательство в этом случае дословно повторяет предыдущие рассуждения, если определить $y_n \doteq$ $= n_{s_0}{}^{r_2}(x_n - \tilde{x})$, $x_n \in \bar{A}$, $n = 1, 2, \dots$

Теорема доказана.

Следующая теорема является ответом на вопрос Б. А. Пасынкова, существуют ли наследственно несвязные метризуемые группы положительной размерности?

Теорема 5. *Существует метризуемая свободная абелева группа G со счетной базой такая, что* $\dim G = \infty$ *и пересечение всех открытых подгрупп G содержит лишь* 0.

Доказательство. Пусть C — канторово множество. Существует такое сепарабельное метрическое пространство X, что X уплотняется на C и $\dim X = \infty$ ([5]). Пусть $f: X \to C$ уплотнение, ρ_0 — метрика C и ρ_1 — метрика пространства X. Тогда $\rho(x, y) = \rho_1(x, y) + \rho_0(f(x), f(y))$, где $x, y \in X$, является метрикой пространства X. Пусть G — свободная абелева группа с базой X, нулем которой является некоторая точка $x_0 \in X$. Тогда метрику ρ на пространстве X можно продолжить до максимальной инвариантной метрики $\bar\rho$ на группе G, индуцирующей на X метрику ρ. Докажем, что группа G в топологии, индуцируемой метрикой $\bar\rho$, удовлетворяет всем условиям теоремы.

Пусть $a \in G$, $a \neq 0$ и $a = n_1 x_1 + \ldots + n_k x_k$ — однозначная запись элемента a через элементы множества $X - x_0$. Покажем, что существует такая открытая подгруппа $G_a \subset G$, что $a \notin G_a$. Пусть $x_0' = f(x_0)$, $x_1' = f(x_1), \ldots, x_k' = f(x_k)$. Разобьем пространство C на $n_1 + 1$ непересекающихся непустых открыто-замкнутых подмножеств $A_0, A_1, \ldots, A_{n_1}$ так, что $x_i' \in A_0$ при $0 \leqslant i \leqslant k$, $i \neq 1$ и $x_1' \in A_1$. Так как C является компактом, $\varepsilon = \min\limits_{i \neq j,\ 0 \leqslant i,\ j \leqslant n_1} \rho_0(A_i, A_j) > 0$. Пусть $B_i = f^{-1}(A_i)$, $i = 0, 1, \ldots, n_1$. Ясно, что $0 \in B_0$, $x_i \in B_0$ при $i \neq 1$ и $x_1 \in B_1$, причем $\rho(B_i, B_j) \geqslant \varepsilon$ при $i \neq j$, $0 \leqslant i$, $j \leqslant n_1$. Рассмотрим абелеву группу Z_{n_1+1} вычетов группы целых чисел Z по модулю $n_1 + 1$. Пусть $\bar\rho_0$ — такая инвариантная метрика на Z_{n_1+1}, что $\operatorname{diam}_{\bar\rho_0} Z_{n_1+1} < \varepsilon$. Определим отображение $g\colon X \div Z_{n_1+1}$ следующим образом: $g(B_0) = 0$, $g(B_i) = iS$, $1 \leqslant i \leqslant n$, где S — образующая группы Z_{n_1+1}. Нетрудно видеть, что $\bar\rho_0(g(x), g(y)) \leqslant \rho(x, y)$ для любых $x, y \in X$. Из этого неравенства уже непосредственно вытекает, что отображение g можно продолжить так до гомоморфизма $\bar g\colon G \to Z_{n_1+1}$, что для любых элементов $x, y \in G$, $\bar\rho_0(\bar g(x), \bar g(y)) \leqslant \rho(x, y)$. Отсюда, в частности, следует, что гомоморфизм $\bar g$ непрерывен. Пусть G_a — ядро гомоморфизма $\bar g$. Ясно, что G_a является открытой подгруппой G и $a \notin G_a$, так как

$$\bar g(a) = \bar g\left(\sum_{i=1}^{k} n_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{k} n_i \bar g(x_i) = n_1 S \neq 0.$$

Теорема доказана.

Механико-математический факультет
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова

Поступило
22 VI 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. И. Граев, Изв. АН СССР, сер. матем., 12, № 3, 279 (1948). [2] Б. А. Пасынков, ДАН, 161, № 2, 281 (1965). [3] А. Г. Курош, Теория группы, «Наука», 1967. [4] F. Hausdorff, Fund. Math., 16, 353 (1930). [5] К. Куратовский, Топология, 1, М., 1966.