

УДК 517.948.32:517.544

МАТЕМАТИКА

Н. Л. ВАСИЛЕВСКИЙ

ОБ УСЛОВИЯХ НЁТЕРОВОСТИ И ФОРМУЛА ДЛЯ ИНДЕКСА ОДНОГО КЛАССА ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ТИПА ПОТЕНЦИАЛА

(Представлено академиком Н. И. Мусхелишвили 29 VI 1971)

1. В настоящей статье рассматриваются операторы

$$M\varphi \equiv a\varphi + bN\varphi + cS\varphi + T\varphi, \quad (1)$$

$$K\varphi \equiv a\varphi + bN\varphi + T\varphi, \quad (2)$$

где $a(t)$, $b(t)$, $c(t) \in C(\mathcal{L})$, $\varphi(t) \in L_p(\mathcal{L})$, $p > 1$, T — вполне непрерывный оператор,

$$S\varphi = \frac{1}{\pi i} \int_{\mathcal{L}} \frac{\varphi(\tau) d\tau}{\tau - t}, \quad N\varphi = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}} \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau - t) \ln(\tau - t) \dots \ln_{(n)}^m(\tau - t)},$$

$0 < m \leq 1$, $\ln_{(i)}(\tau - t) = \ln \ln_{(i-1)}(\tau - t)$, контур $\mathcal{L}$ предполагается простым замкнутым контуром Ляпунова с условием

$$\sup_{t_1, t_2 \in \mathcal{L}} |t_1 - t_2| < 1.$$

Насколько известно автору, проблема исследования оператора (2) была выдвинута в 1954 г. Ф. Д. Гаховым. Интерес к оператору (2) был вызван, прежде всего, тем, что он является в определенном смысле промежуточным между оператором с ядром Коши (который подчиняется теории Нётера ^(1, 2)) и оператором со слабо полярным ядром (для которого справедлива альтернатива Фредгольма).

2. Пусть $\varphi(t) \in H(\mathcal{L})$, рассмотрим функцию

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}} \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau - z) \ln(\tau - z) \dots \ln_{(n)}^m(\tau - z)}. \quad (3)$$

Интеграл (3) в случае $n = 1$ был исследован в работе ⁽³⁾.

Произвольную точку t_0 контура $\mathcal{L}$ соединим с бесконечно удаленной точкой гладкой кривой Γ .

Будем считать, что функция $\ln(\tau - z)$ переменного τ есть главная ветвь логарифма, непрерывная на $\mathcal{L}$ всюду, кроме точки t_0 . Функция $\ln_{(i)}(\tau - z)$ определяется как главное значение логарифма функции $\ln_{(i-1)}(\tau - z)$.

Особыми линиями интеграла (3) являются линии

$$\mathcal{L}: t = t(s), \quad \mathcal{L}_i: t_i = t(s) - \rho_i,$$

где $i = 1, 2, \dots, n$, $\rho_i = e^{\rho_{i-1}}$, $\rho_1 = 1$.

Теорема 1. Функция $\Phi(z)$ является кусочно-аналитической функцией с линиями скачков $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}_i$ ($i = 1, \dots, n$) и Γ , предельные значения функции $\Phi(z)$ на контуре $\mathcal{L}$ даются формулами

$$\Phi^+(t) = \omega_{n, m}(t)\varphi(t) + \Phi(t), \quad (4)$$

$$\Phi^-(t) = \Phi(t), \quad (5)$$

$$\text{где } \omega_{n,m}(t) = \frac{1}{2\pi i (1-m)} [\ln_{(n-1)}^{1-m} [\ln(t_0 - t) + 2\pi i] - \ln_{(n)}^{1-m}(t_0 - t)]$$

при $0 < m < 1$ и

$$\omega_{n,1}(t) = \frac{1}{2\pi i} [\ln_{(n)} [\ln(t_0 - t) + 2\pi i] - \ln_{(n+1)}(t_0 - t)].$$

3. Теорема 2. Оператор N действует в пространстве $L_p(\mathcal{L})$, $p > 1$, и является в нем линейным и ограниченным оператором.

Доказательство теоремы аналогично доказательству Б. В. Хведелидзе ⁽⁴⁾ для оператора с ядром Коши и основано на связи между ядрами Коши и Гильберта и исследованных М. Рисса ⁽⁸⁾, относящихся к оператору с ядром Гильберта.

Теорема 3. Пусть $b(t) \in C(\mathcal{L})$, тогда оператор $Nb - bN$ вполне непрерывен.

Доказательство следующих трех лемм основано на методе аналитического продолжения и использует формулы Сохоцкого ^(1, 2) и формулы ^{(4), (5)}.

Лемма 1. $N(\omega_{n,m}\varphi + N\varphi) \equiv 0$.

Лемма 2. $N(\varphi + S\varphi) \equiv 0$.

Лемма 3. $S(\omega_{n,m}\varphi + N\varphi) \equiv \omega_{n,m}\varphi + N\varphi$.

4. Пусть

$$M_1 = a_1I + b_1N + c_1S + T_1, \quad M_2 = a_2I + b_2N + c_2S + T_2;$$

тогда коэффициенты операторов

$$M = M_1 \cdot M_2 = aI + bN + cS + T$$

выражаются формулами

$$a = a_1a_2 + c_1c_2 + c_1b_2\omega_{n,m},$$

$$b = a_1b_2 + b_1a_2 - b_1b_2\omega_{n,m} + c_1b_2 - b_1c_2,$$

$$c = a_1c_2 + c_1a_2 - c_1b_2\omega_{n,m}.$$

Теорема 4. Для того чтобы оператор M был нётеров, достаточно выполнения на $\mathcal{L}$ условия

$$(a + c)(a - b\omega_{n,m} - c) \neq 0. \quad (6)$$

В самом деле, оператор $V = (a - b\omega_{n,m})I - bN - cS$ является правым и левым регуляризатором для M , причем

$$MV = (a + c)(a - b\omega_{n,m} - c)I + T_1,$$

$$VM = (a + c)(a - b\omega_{n,m} - c)I + T_2.$$

5. Обозначим через R множество операторов вида (4) с условием (6). Символом оператора M назовем выражение

$$\sigma(M) = (a + c, a - b\omega_{n,m} - c).$$

В силу $a + c \neq 0$ можно рассматривать символ с единичной первой компонентой

$$\sigma(M) = \left(1, \frac{a - b\omega_{n,m} - c}{a + c}\right) = \left(\frac{a - b\omega_{n,m} - c}{a + c}\right).$$

Лемма 4. Символ композиции операторов M_1 и M_2 равен произведению символов этих операторов.

На множестве R введем отношение эквивалентности: $M_1 \sim M_2$ тогда и только тогда, когда символы $\sigma(M_1)$ и $\sigma(M_2)$ гомотопны. Единственным гомотопическим инвариантом функций $(a - b\omega_{n,m} - c) / (a + c)$ является

$$\kappa(M) = \frac{1}{2\pi} \left[\arg \frac{a - b\omega_{n,m} - c}{a + c} \right]_{\mathcal{L}}.$$

Классы эквивалентности

$$R_i = \{M | \kappa(M) = i\}.$$

Из теоремы устойчивости Ф. В. Аткинсона ⁽⁵⁾ следует, что если $\kappa(M_1) = \kappa(M_2)$, то $\text{Ind } M_1 = \text{Ind } M_2$.

Определим отображение f множества R в группу целых чисел $f(M) = \text{Ind } M$. Функция f постоянная на классах R_i .

Пусть $M_1 \in R_1$ (например, $M_1 = (1+t)I + (1-t)S$) и пусть $\text{Ind } M_1 = k$. Тогда $M_1^i \in R_i$ и $f(M_1^i) = ik$. Рассмотрим теперь произвольный оператор $M \in R_i$. Имеем $\text{Ind } M = \text{Ind } M_1^i = ik = k\kappa(M)$. Найдем k . Пусть $M_2 = aI + cS + T$, тогда

$$\text{Ind } M_2 = k\kappa(M_2) = \frac{1}{2\pi} \left[\arg \frac{a-c}{a+c} \right]_{\mathcal{L}}.$$

Следовательно, $k = 1$ и

$$\text{Ind } M = \frac{1}{2\pi} \left[\arg \frac{a - b\omega_{n,m} - c}{a + c} \right]_{\mathcal{L}}. \quad (7)$$

6. Теорема 5. Для того чтобы оператор M был нётеров, необходимо выполнение на контуре $\mathcal{L}$ условия

$$(a + c)(a - b\omega_{n,m} - c) \neq 0.$$

Доказательство теоремы проводится от противного (идея доказательства взята из работ ^(6, 7)) и использует теорему устойчивости Ф. В. Аткинсона ⁽⁵⁾, формулу (7) и следующую лемму.

Лемма 5. Пусть $B(t)$ — непрерывная функция, заданная на замкнутом контуре $\mathcal{L}$. Пусть, кроме того, точка 0 входит в область значений функции $B(t)$.

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ можно найти непрерывные функции $B_1(t)$ и $B_2(t)$ такие, что

$$1) \quad B_1(t) \neq 0 \text{ и } B_2(t) \neq 0 \text{ на контуре } \mathcal{L},$$

$$2) \quad \sup_{t \in \mathcal{L}} |B(t) - B_i(t)| < \varepsilon, \quad i = 1, 2,$$

$$3) \quad [\arg B_1(t)]_{\infty} \neq [\arg B_2(t)]_{\infty}.$$

7. Из общего случая (1) выделим подкласс операторов вида (2). Необходимым и достаточным условием нётеровости оператора K (как это следует из теорем 4 и 5) является выполнение на контуре $\mathcal{L}$ условия

$$a(t)[a(t) - b(t)\omega_{n,m}(t)] \neq 0.$$

Формула для индекса оператора K может быть выведена и независимо от формулы для индекса M .

В самом деле, рассмотрим оператор

$$M_0 = K = aI + bN + T$$

при условии $a(a - b\omega_{n,m}) \neq 0$. В этом случае оператор M_0 гомотопен оператору

$$M_1 = \left(a - \frac{b\omega_{n,m}}{2}\right)I + \frac{b\omega_{n,m}}{2}S + T.$$

Гомотопию осуществляет оператор

$$M_\lambda = \left(a - \lambda \frac{b\omega_{n,m}}{2}\right)I + (1-\lambda)bN + \lambda \frac{b\omega_{n,m}}{2}S + T, \quad \lambda \in [0, 1].$$

Следовательно, $\text{Ind } M_0 = \text{Ind } M_1$ или

$$\text{Ind } K = \frac{1}{2\pi} \left[\arg \frac{a - b\omega_{n,m}}{a} \right]_{\mathcal{L}}.$$

8. Построим пример оператора K , имеющего ненулевой индекс. Кривая $\omega = \omega_{n,m}(t)$, $t \in \mathcal{L}$, является непрерывной замкнутой кривой, ограничивающей односвязную область и проходящей через точку 0.

Выберем комплексное число z_0 так, чтобы

$$[\arg (\omega_{n,m}(t) - z_0)]_{\mathcal{L}} \neq 0.$$

Оператор $K_1 = z_0 I + N + T$ удовлетворяет требуемому свойству.

9. «Промежуточное» положение оператора K по сравнению с операторами с ядром Коши и со слабо полярным ядром обуславливает и «промежуточные» свойства оператора K . Так, например, при выполнении определенных условий оператор K нётеров (как и оператор с ядром Коши), но в то же время теория уравнений 1 рода (как и в случае операторов со слабо полярным ядром) не включается в общую теорию уравнения

$$K\varphi = f.$$

Рассмотренный в работе одномерный случай непосредственно переносится и на соответствующие системы уравнений.

В заключение автор пользуется возможностью выразить глубокую признательность проф. Г. С. Литвинчуку, руководившему настоящей работой.

Одесский государственный университет
им. И. И. Мечникова

Поступило
5 III 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Н. И. Мусхелишвили, Сингулярные интегральные уравнения, «Наука», 1968. ² Ф. Д. Гахов, Краевые задачи, 1963. ³ И. М. Мельник, Сборн. статей Исследования по современным проблемам теории функций комплексного переменного, 1961. ⁴ Б. В. Хведелидзе, Тр. Тбилисск. матем. инст., 23 (1957). ⁵ Ф. В. Аткинсон, Матем. сборн., 28, № 1 (1951). ⁶ М. Г. Крейн, УМН, 13, в. 5 (1958). ⁷ I. C. Gohberg, N. Ja. Krupnik, Studia Math., 31, 347 (1968). ⁸ M. Riesz, Math. Zs., 27, 218 (1927).