Доклады Академии наук СССР
1971. Том 200, № 6

УДК 517.948.35 *МАТЕМАТИКА*

А. Н. КОЖЕВНИКОВ

ОБ АСИМПТОТИКЕ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ И ПОЛНОТЕ КОРНЕВЫХ ВЕКТОРОВ ОПЕРАТОРА, ПОРОЖДЕННОГО КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕЙ СО СПЕКТРАЛЬНЫМ ПАРАМЕТРОМ В ГРАНИЧНОМ УСЛОВИИ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 12 IV 1971)

Пусть Ω — компактное бесконечно дифференцируемое n-мерное риманово многообразие с краем Γ и A — эллиптический дифференциальный оператор порядка $2r$ (r — целое) с коэффициентами из $C^\infty(\Omega)$. Пусть B_j ($j=1, 2, \ldots, r$) и C_j ($j=1, 2, \ldots, l\leqslant r$) — граничные дифференциальные операторы порядков M_j и m_j соответственно с коэффициентами из C^∞ на Γ и порядка по трансверсали строго меньше $2r$ [1, 2].

Рассмотрим задачу на собственные значения

$$\begin{aligned} &Au=0 \quad \text{на} \quad \Omega,\\ &B_ju=\lambda C_ju \quad \text{на} \quad \Gamma, \quad 1\leqslant j\leqslant l, \\ &B_ju=0 \quad \text{на} \quad \Gamma, \quad l+1\leqslant j\leqslant r. \end{aligned} \tag{1}$$

Задача (1) несколько необычна, так как спектральный параметр λ входит только в граничные условия, однако, как и в классической ситуации $Au=\lambda u$ на Ω, $B_ju=0$ на Γ при $j=1, 2, \ldots, r$, система (1) порождает линейный неограниченный оператор P в некотором гильбертовом пространстве, так что спектральная задача (1) эквивалентна задаче о собственных значениях оператора P: $Pv=\lambda v$.

Область определения оператора P, соответствующего задаче (1), $D(P)$, состоит из всех вектор-функций вида

$$v(x')=\{C_1w \text{ на } \Gamma,\ C_2w \text{ на } \Gamma, \ldots, C_lw \text{ на } \Gamma\},$$

где $x'\in\Gamma$, $w\in C^\infty(\Omega\cup\Gamma)$, $Aw=0$ на Ω, $B_{l+1}w=B_{l+2}w=\ldots=B_rw=0$ на Γ. При этом для любых $v\in D(P)$

$$Pv\equiv\{B_1w \text{ на } \Gamma,\ B_2w \text{ на } \Gamma, \ldots, B_lw \text{ на } \Gamma\},$$

т. е. v и Pv являются l-мерными вектор-функциями, определенными на границе Γ. Отсюда легко следует эквивалентность задач (1) и $Pv=\lambda v$. При дополнительных ограничениях оператор P (точнее, его замыкание) является корректно определенным замкнутым неограниченным линейным оператором в гильбертовом пространстве

$$L^2=\underbrace{L^2(\Gamma)\times L^2(\Gamma)\times\ldots\times L^2(\Gamma)}_{l\ \text{раз}},$$

которое обозначает декартово произведение из l скалярных гильбертовых пространств $L^2(\Gamma)$.

Мы будем изучать некоторые спектральные свойства оператора P. В работах [3, 4] для P, порожденного частным видом задачи (1)

$$\Delta u=0 \text{ на } \Omega, \quad -\partial u/\partial\nu=\lambda u \text{ на } \Gamma,$$

была доказана формула $N(\lambda) \sim c\lambda^{n-1}$ при $\lambda \to +\infty$. Здесь Δ — оператор Лапласа, соответствующий римановой метрике на Ω, ν — вектор единичной внутренней нормали к Γ, $N(\lambda) = \sum_{\lambda_j < \lambda} 1$, где $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_j \leqslant \ldots$ $\ldots \to +\infty$ — собственные значения оператора P с учетом кратности, c — некоторая константа. При доказательстве было существенно, что P самосопряжен и полуограничен.

Изучением самосопряженного оператора P, соответствующего задаче, занимались И. Эрколано, М. Шехтер ([5]) и В. Барковский ([6]), однако они не исследовали асимптотику $N(\lambda)$.

Недавно В. Фейгин ([7]) доказал полноту системы корневых векторов несамосопряженного оператора P, порожденного задачей (1), при довольно жестком ограничении $M_1 - m_1 = M_2 - m_2 = \ldots = M_l - m_l$. В связи с этим возникают два вопроса: первый — об асимптотике $N(\lambda)$ оператора P, соответствующего задаче (1), и второй — о полноте системы корневых векторов оператора P, когда не выполнено условие $M_1 - m_1 = M_2 - m_2 = \ldots = M_l - m_l$. При формулируемых ниже достаточных условиях 1, 2, и 3 мы получим асимптотику $N(\lambda)$ (теорема 1) и докажем полноту системы корневых векторов (теорема 2).

Краевые задачи

$$\begin{aligned} &Au = 0 \quad \text{на} \quad \Omega, \\ &B_j u = f_j \quad \text{на} \quad \Gamma, \quad 1 \leqslant j \leqslant l, \\ &B_j u = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma, \quad l+1 \leqslant j \leqslant r; \end{aligned} \tag{2}$$

и

$$\begin{aligned} &Au = 0 \quad \text{на} \quad \Omega, \\ &C_j u = f_j \quad \text{на} \quad \Gamma, \quad 1 \leqslant j \leqslant l, \\ &B_j u = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma, \quad l+1 \leqslant j \leqslant r, \end{aligned} \tag{3}$$

определяют непрерывные операторы $B\varphi = \{B_1\varphi, B_2\varphi, \ldots, B_l\varphi\}$ на Γ из $\{\varphi \in H_s(\Omega) \mid A\varphi = 0$ на Ω, $B_{l+1}\varphi = B_{l+2}\varphi = \ldots = B_r\varphi$ на $\Gamma\}$ в $\prod_{j=1} H_{(s-M_j-1/2)}(\Gamma)$ и $C\varphi = \{C_1\varphi, C_2\varphi, \ldots, C_l\varphi\}$ на Γ из $\{\varphi \in H_s(\Omega) \mid A\varphi = 0$ на Ω, $B_{l+1}\varphi = B_{l+2}\varphi = \ldots = B_r\varphi = 0$ на $\Gamma\}$ в $\prod_{j=1}^{l} H_{(s-m_j-1/2)}(\Gamma)$, где $s > \max_{\substack{1 \leqslant k \leqslant l \\ 1 \leqslant j \leqslant r}} \{2r, M_j, m_k\}$.

Условие 1. *Краевая задача* (3) *эллиптична, и оператор C обратим.*

Рассмотрим оператор $P \equiv BC^{-1}$, отображающий $\prod_{j=1}^{l} H_{(s-m_j-1/2)}(\Gamma)$ в $\prod_{j=1}^{l} H_{(s-M_j-1/2)}(\Gamma)$. Как показано в работе ([8]), оператор P является псевдодифференциальным типа (M, m), где $M = (M_1, M_2, \ldots, M_l)$, $m = (m_1, m_2, \ldots, m_l)$, т. е. P представляется в виде матрицы $(P_{jk})_{j, k = 1, 2, \ldots, l}$, элементы которой суть псевдодифференциальные операторы порядков, не превосходящих $M_k - m_j \equiv \mu_{jk}$. Следовательно, P — непрерывный оператор из $\prod_{j=1}^{l} H_{(s+M_j)}(\Gamma)$ в $\prod_{j=1}^{l} H_{(s+m_j)}(\Gamma)$ при любом вещественном s.

Условие 2. $0 < \mu_{11} < \mu_{22} < \ldots < \mu_{ll}$, *где* $\mu_{jk} = M_k - m_j$ $(j, k = 1, 2, \ldots, l)$.

Как известно, в произвольной системе локальных координат $x_1, x_2, \ldots$ $\ldots, x_{n-1}$ на Γ с P можно связать формульную матричную сумму $\sum\limits_{s=0}^{\infty} p^s(x', \xi')$, $x' = (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$, $0 \neq \xi' \in R^{n-1}$, называемую *символом*, где $p^s = (p_{jk}{}^s)_{j, k=1, 2, \ldots, l}$ и $p_{jk}{}^s$ — положительно однородная функция от ξ' степени $\mu_{jk} - s$. Матрица $p^0(x', \xi') = (p_{jk}{}^0(x', \xi'))_{j, k=1, 2, \ldots, l}$ называется *главным символом оператора* P.

Обозначим через $p^0\begin{pmatrix} j_1, j_2, \ldots, j_s \\ k_1, k_2, \ldots, k_s \end{pmatrix}$ матрицу, полученную из $p^0(x', \xi')$ после вычеркивания строк и столбцов с номерами $j_1, j_2, \ldots, j_s$ и $k_1, k_2, \ldots, k_s$ соответственно $(1 \leqslant j_1 < j_2 < \ldots < j_s \leqslant l;\ 1 \leqslant k_1 < < k_2 < \ldots < k_s \leqslant l)$.

Условие 3. *В каждой координатной окрестности U многообразия* Γ

$$\det p^0 \begin{pmatrix} 12\ldots j \\ 12\ldots j \end{pmatrix} \neq 0 \ (j = 1, 2, \ldots, l-1), \ \det p^0 \neq 0 \ \textit{при } x' \in U, \ |\xi'| = 1.$$

Рассмотрим выражения $\tau_1(x', \xi') \equiv \det p^0 / \det p^0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\tau_j(x', \xi') \equiv$ $\equiv \det p^0 \begin{pmatrix} 12\ldots j-1 \\ 12\ldots j-1 \end{pmatrix} \Big/ \det p^0 \begin{pmatrix} 12\ldots j \\ 12\ldots j \end{pmatrix}$ $(j = 2, 3, \ldots, l-1)$, $\tau_l(x', \xi') \equiv$ $\equiv \det p^0 \begin{pmatrix} 12\ldots l-1 \\ 12\ldots l-1 \end{pmatrix}$.

Теорема 1. *Пусть оператор P удовлетворяет условиям* 1, 2 *и* 3. *Пусть, кроме того, $M_1 \leqslant M_2 \leqslant \ldots \leqslant M_l$, $m_1 \geqslant m_2 \geqslant \ldots \geqslant m_l$ и в каждой координатной окрестности U многообразия Γ $\tau_j(x', \xi') > 0$ при $x' \in U$, $|\xi'| = 1$ $(j = 1, 2, \ldots, l)$.*

Тогда для собственных значений оператора $P\{\lambda_j\}_{j=1}^{\infty}$, упорядоченных в соответствии с $\operatorname{Re}\lambda_1 \leqslant \operatorname{Re}\lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \operatorname{Re}\lambda_j \leqslant \ldots \to +\infty$, где λ_j фигурирует столько раз, какова размерность соответствующего ему корневого подпространства, имеют место следующие соотношения:

$$N_{\mathrm{Re}}(\lambda) \equiv \sum_{\operatorname{Re}\lambda_j < \lambda} 1 \sim c_0 \lambda^{(n-1)/\mu_{11}} \ \textit{при } \lambda \to +\infty,$$
$$\lambda_j \sim c_1 j^{\mu_{11}/(n-1)} \ \textit{при } j \to +\infty.$$

Здесь c_0 и c_1 — константы, не зависящие от x' и ξ' и определяемые формулами

$$c_0 = (2\pi)^{-(n-1)} \int\limits_{\Gamma} \Bigl(\int\limits_{\tau_1 < 1} d\xi' \Bigr) dx', \quad c_1 = (2\pi)^{\mu_{11}} \Bigl[\int\limits_{\Gamma} \Bigl(\int\limits_{\tau_1 < 1} d\xi' \Bigr) dx' \Bigr]^{-\mu_{11}/(n-1)},$$

где dx' — риманова мера на Γ, а $d\xi'$ — соответствующая ей мера на кокасательном расслоении $T^*(\Gamma)$.

Теорема 2. *Пусть оператор P удовлетворяет условиям* 1, 2 *и* 3. *Пусть, кроме того, существуют вещественные числа $0 \leqslant \gamma_1 < \gamma_2 < \ldots$ $\ldots < \gamma_N < 2\pi$ такие, что $\gamma_{j+1} - \gamma_j < \dfrac{\pi(n-1)}{\mu_{11}}$ $(j = 0, 1, \ldots, N-1)$, $2\pi + \gamma_1 - \gamma_N < \pi(n-1)/\mu_{11}$ и $\arg \tau_j(x', \xi') \neq \gamma_k$ $(j = 1, 2, \ldots, l;\ k = 1, 2, \ldots, N)$ в каждой координатной окрестности U многообразия Γ при $x \in U'$, $|\xi'| = 1$.*

Тогда замкнутое подпространство, натянутое на все корневые вектора оператора P, совпадает с гильбертовым пространством $\prod\limits_{j=1}^{l} H_{(m_j)}(\Gamma)$.

Замечание. В условии 2 можно ослабить строгие неравенства $\mu_{11} < \mu_{22} < \ldots < \mu_{ll}$, допуская всюду знак $\leqslant$, однако тогда условие 3 и соотношения, определяющие $\tau_j(x', \xi')$ $(j = 1, 2, \ldots, l)$, придется сформулировать в неявном виде. Формулировки теорем 1 и 2 при этом не изменяются.

Пример. Рассмотрим задачу

$$\Delta^3 u = 0 \text{ на } \Omega, \quad -\partial^5 u / \partial \nu^5 = \lambda\, \partial u / \partial \nu \text{ на } \Gamma,$$

$$\partial^4 u / \partial \nu^4 = \lambda\, \partial^2 u / \partial \nu^2 \text{ на } \Gamma, \quad u = 0 \text{ на } \Gamma,$$

где Δ — оператор Лапласа, соответствующий римановой метрике на Ω, $\partial^k / \partial \nu^k$ — производная k-го порядка в направлении единичной внутренней нормали ν. Можно показать ([8]), что в этом случае

$$p^0(x', \xi') = \begin{bmatrix} 6\,|\xi'|^2 & 8\,|\xi'|^3 \\ 10\,|\xi'|^3 & 15\,|\xi'|^4 \end{bmatrix},$$

где $|\xi'|$ — длина вектора ξ', кокасательного к Γ. Легко видеть, что все условия теорем 1 и 2 выполняются. Поэтому $N_{\mathrm{Re}}(\lambda) \sim c_0 \lambda (n-1)/2$ при $\lambda \to +\infty$, и система корневых векторов полна в пространстве $H_{(1)}(\Gamma) \times \times H_{(2)}(\Gamma)$.

Автор выражает глубокую благодарность А. Г. Костюченко и В. А. Садовничему за постановку задачи и поддержку в работе.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
6 IV 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. Хёрмандер, Линейные дифференциальные операторы, М., 1965. [2] Л. Хёрмандер, Неэллиптические краевые задачи, В сборн. Псевдодифференциальные операторы, М., 1967. [3] F. Odhnoff, Medd. Lunds Univ. Mat. Sem., 14 (1959). [4] L. Sandgren, Medd. Lunds Univ. Mat. Sem., 13 (1955). [5] J. Ercolano, M. Schechter, Commun. Pure and Appl. Math., 18, 1—3, 83, 397 (1965). [6] В. В. Барковский, Укр. матем. журн., 19, 1, 9 (1967). [7] В. И. Фейгин, УМН, 24, 6, 195 (1969). [8] Б. Р. Вайнберг, В. В. Грушин, Матем. сборн., 73, № 1, 126 (1965).