

П. Е. КРАСНУШКИН

КАЧЕСТВЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ТРАЕКТОРИЙ ЛУЧЕЙ РАДИОВОЛН В СЛОИСТОЙ СРЕДЕ МЕТОДОМ ФАЗОВЫХ ТРАЕКТОРИЙ

(Представлено академиком Л. И. Седовым 12 IV 1971)

1. Уравнения траекторий лучей электромагнитных волн частоты $\omega = 2\pi f$ в неоднородной анизотропной среде можно записать в виде канонических уравнений Гамильтона для движения материальной точки

$$dx_i/dt = \partial H/\partial p_i; \quad dp_i/dt = -\partial H/\partial x_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (1)$$

Здесь $H = \omega = cp/\mu$ — гамильтониан, x_i — координаты точки луча, t — время распространения фазы волны, c — скорость света в вакууме, μ — коэффициент преломления (фазовый), зависящий от x_i и p_i , $p = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}$ — модуль волнового вектора $\mathbf{p}$ с компонентами p_i , связанными с направляющими косинусами волновой нормали $\mathbf{n}$; $\cos \alpha_i = p_i/p$.

Уравнения (1) являются частным случаем системы уравнений, исследуемой качественными методами в теории автономных динамических систем (¹⁻³). Чтобы применить эти методы в данном случае, следует рассматривать на траектории лучей $x_i(t - t_0, C_1, C_2, \dots, C_5)$ в трехмерном координатном пространстве, а фазовые траектории, представляемые движением точки $P(t - t_0)$ в шестимерном пространстве координат и компонент волнового вектора (фазовое пространство). В силу консервативности системы (1) точка P движется по гиперповерхности $H = \text{const}$. Преимущество такого рассмотрения состоит в том, что фазовые траектории лучей, в отличие от самих траекторий лучей, нигде не пересекаются (если (1) не имеет особенностей), и качественное исследование в основном сводится к изучению особых точек «фазового портрета», координаты которых определяются из условий равенства нулю правых частей (1).

2. Мы применим качественную теорию динамических систем к случаю сферически-слоистой изотропной среды, изоморфному случаю нелинейной консервативной динамической системы с одной степенью свободы, хорошо изученному в теории колебаний (⁴). Для этого введем сферические координаты r, θ, φ таким образом, чтобы μ зависело только от r , а полярная ось $\theta = 0$ проходила через начальную точку, в которой находится источник излучения. Тогда можно ограничиться рассмотрением лучей только в плоскости $\varphi = \text{const}$. Система (1) в этом случае примет вид

$$\frac{dr}{dS} = \cos \alpha, \quad \frac{d\theta}{dS} = \frac{\sin \alpha}{r}, \quad \frac{d\alpha}{dS} = -\sin \alpha \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mu}{\partial r} \right), \quad (2)$$

где $dS = c dt/\mu$ — длина дуги луча, α — угол между направлением луча и осью r . Координата θ циклическая. Взяв ее за независимую переменную, получим из (2) систему двух уравнений, определяющих $r(\theta)$ и $\alpha(\theta)$

$$\frac{dr}{d\theta} = r \operatorname{ctg} \alpha, \quad \frac{d\alpha}{d\theta} = -r \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mu}{\partial r} \right). \quad (3)$$

Будем рассматривать решения $r(\theta), \alpha(\theta)$ системы (3) как траектории в фазовом пространстве с координатами r и α , образуемые движением точки $P(r, \alpha)$ при изменении θ . Для того чтобы $P(\theta)$ представляла состояние си-

стемы (3) однозначно, введем цилиндрическую фазовую поверхность, например поверхность кругового цилиндра, направив r по образующей и принимая α за угловую координату. В этом случае лучи, идущие под углом α и $\alpha + 2\pi m$ ($m = 1, 2, 3, \dots$), неразличимы. Через две образующие $\alpha = 0$ и $\alpha = \pi$ фазовые траектории переходить не могут. Все лучи, соответствующие росту θ , имеют фазовые траектории, лежащие на половине цилиндра $0 < \alpha < \pi$. Ограничимся рассмотрением этих траекторий, представляя половину цилиндра в виде полосы $(0, \pi)$ плоскости.

Систему уравнений (3) можно записать в форме, аналогичной (1):

$$dr/d\theta = r \partial F / \partial \alpha, \quad d\alpha/d\theta = -r \partial F / \partial r; \quad (4)$$

$$F = \ln[r\mu(r) \sin \alpha] = \ln[r_0\mu(r_0) \sin \alpha_0] = \text{const.} \quad (5)$$

Это значит, что система (3) является гамильтоновой и по топологическим свойствам подобна консервативной гамильтоновой системе с одной степенью свободы. Как известно (см., например, (4)), на фазовых поверхностях таких систем могут быть особые точки только двух видов: типа центра и седла. Координаты этих точек определяются как корни уравнений

$$\text{ctg } \alpha = 0; \quad \frac{1}{r} + \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mu}{\partial r} = 0. \quad (6', 6'')$$

Согласно (6'), все особые точки лежат на прямых $\alpha = \pi/2$ и $3\pi/2$. Их абсциссами $r = r_0$ являются корни уравнений (6'').

Если отложить F (или $r\mu(r) \sin \alpha$) по третьей декартовой координате z , то функция $F(r, \alpha)$ будет поверхностью с максимумами в точках типа центра $r_0 = r_n$, и с седловинами в точках типа седла $r_0 = r_c$. Фазовые траектории образуются линиями пересечений этой поверхности с плоскостями $F = F_0$. Они сплошь заполняют полосу $0 < \alpha < \pi$. Таким образом, «фазовый портрет» уравнений (3) определяется функцией $n(r) = r\mu$, называемой модифицированным коэффициентом преломления. Если $n(r)$ — гладкая функция, то центры совпадают с ее максимумами, а седла — с минимумами. На рис. 1а изображен случай $n(r)$ с одним максимумом и двумя минимумами и на фазовой плоскости имеется одна точка типа центра и два седла $r_0 = r_{c1}$ и $r_0 = r_{c2}$.

Используя (5), построим фазовые траектории для $n(r)$ рис. 1а. В окрестности центра фазовые траектории имеют вид эллипсоподобных замкнутых кривых, а траектории лучей либрируют относительно слоя $r = r_n$. (На рис. 1б даны траектории лучей, вышедших из точки $\bar{r} = r_n$.)

В окрестности седла $r_0 = r_{c1}$ и $r_0 = r_{c2}$ фазовые траектории имеют вид гипербол, разделенных особыми линиями — сепаратрисами. Для $r_0 = r_{c1}$ в областях 3 и 5 (рис. 1а) существуют лучи, уходящие в бесконечность без пересечения слоя $r = r_{c1}$, а в областях 4 и 6 — лучи, уходящие в бесконечность, пересекающие слой $r = r_{c1}$. (На рис. 1в показаны лучи этих областей для точек излучения $\bar{r}_1 = r_{c1} - \Delta r$ и $\bar{r}_2 = r_{c1} + \Delta r$.)

Особый интерес представляют замкнутые сепаратрисы, внутри которых существуют только замкнутые фазовые траектории, соответствующие либрирующим лучам. Область фазовой плоскости (r, α) внутри замкнутой сепаратрисы определяет волноводный канал в слоистой среде. Внутри этой области может содержаться нечетное число особых точек, причем седла на единицу меньше числа центров. Для простого канала (рис. 1) внутри замкнутой сепаратрисы А имеется только одна точка типа центра.

Чтобы излучатель возбудил канал, точка $\bar{r}$ должна лежать внутри канала ($r_{c2} < \bar{r} < r_s$). Угол $\Delta\beta = \alpha_{s2} - \alpha_{s1}$ назовем углом захвата лучей волноводным каналом. Он зависит от положения точки $\bar{r}$ и достигает максимума при $\bar{r} = r_n$. Простой волноводный канал характеризуется двумя

параметрами: угловой шириной $\Delta\beta_{\max}$ и линейной шириной $\Delta r = |r_s - r_c|$.
Для симметричного канала

$$n(r) = n(r_0) - a(r - r_0)^2 + b(r - r_0)^4, \quad \Delta\beta_{\max} = 2a\sqrt{2b}, \quad \Delta r = 2\sqrt{a/(2b)}. \quad (7)$$

Каустики и фокальные точки лучей в волноводном канале определяют конфигурацию линий равных фаз (пунктир на рис. 1б), именно, зависимость периода либрации $\Delta\theta$ от угла выхода луча, $\beta = 90^\circ - \alpha$, из точки $\bar{r}$. Для случая (7) $\Delta\theta$ имеет экстремум при $\beta = 0$ ($\bar{r} = r_c$) равный $1/\sqrt{2a}$. Если угловая ширина канала меньше $2\sqrt{0,6}$, то $\Delta\theta$ растет с увеличением β ; при $\Delta\beta_{\max} > 2\sqrt{0,6}$ $\Delta\theta$ падает с ростом β . По терминологии

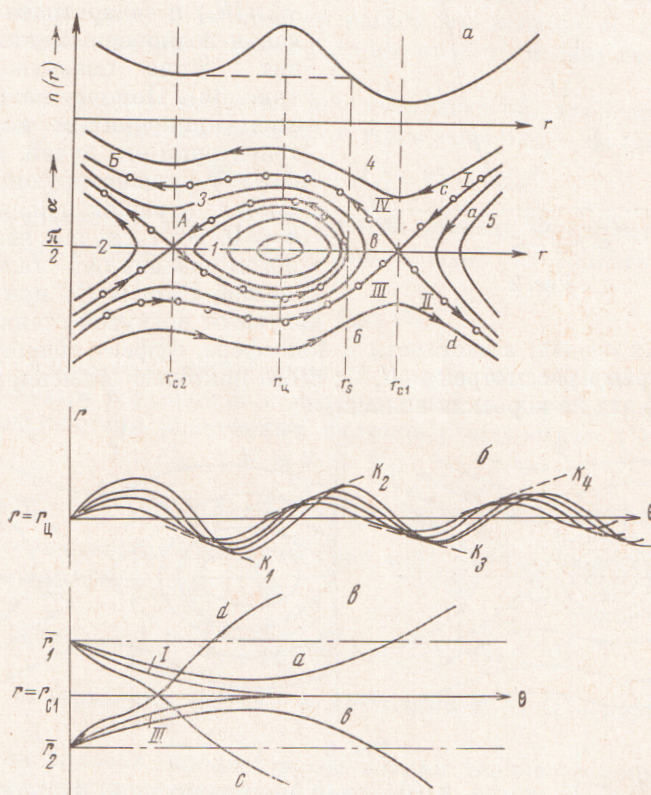


Рис. 1

В. М. Булдырева ⁽⁵⁾, в первом случае мы имеем дело со слабым волноводным каналом, во втором — с сильным. В слабом канале каустические линии, возникающие при $\bar{r} = r_c$ на оси канала, с ростом θ отходят от него, как показано на рис. 1б, в сильном канале — они сходятся к оси канала.

Если $\Delta\theta$ не зависит от β (случай «изохронизма») возникают фокальные точки. Примером этого является линза Максвелла ⁽⁶⁾, для которой $n(\rho) = n_0[\rho^{2k+1} + \rho^{-(2k+1)}]^{-1}$, $\rho = r/a$ и $k > 0$, $r_c = a$, $r_{c1} = 0$ и $r_{c2} = \infty$.

Если при $r = r_p$ функция $n(r)$ пересекает 0 и становится отрицательной или при $r = r_p$ имеется разрыв $n(r)$, то на этом слое возникает отраженный луч. На фазовой плоскости этот факт представляется скачком траектории из точки $(r_p, -a)$ в точку (r_p, a) .

3. В качестве примера с помощью формулы (5), которую мы запишем в виде $n(r) \cos \beta = n(r_0) \cos \beta_0 = \text{const}$, рассчитаем фазовые траектории для слоя плазмы с $n = r\sqrt{1 - (N_e/(12,4f^2))}$ (электронная кон-

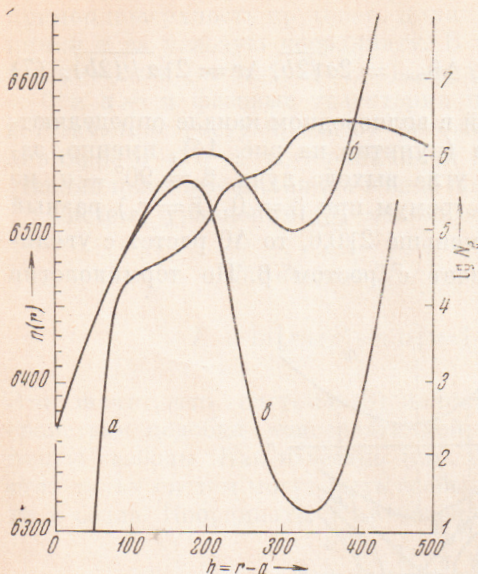


Рис. 2

В слоистых средах, в частности в ионосфере, эффект «шепчущей галереи» был впервые рассмотрен в ^(7, 8); с его помощью объясняется эффект кругосветного эха на коротких волнах.

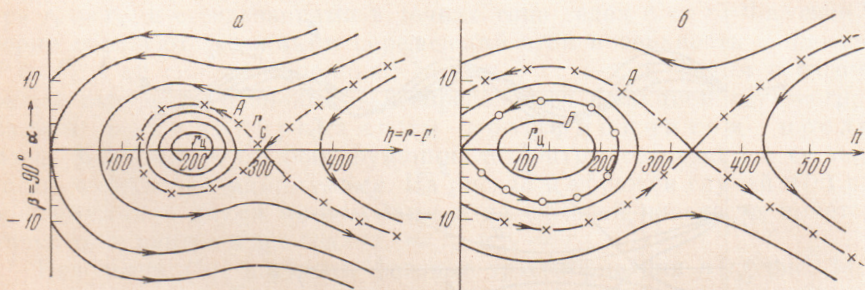


Рис. 3

Для $f = f_2 < f_1$, когда $n(0) > n(h_c)$, сепаратриса A пересекает поверхность $h = 0$ (рис. 3б). Теперь внутри волноводного канала возможны два типа лучей: 1) рикошетирующие, с фазовыми траекториями внутри кривой B ; 2) лучи, испытывающие отражение от слоя $h = 0$ и рефракцию в слоях, расположенных ниже седла $h = h_c$. При повышении частоты f волноводный канал исчезнет, когда седло сольется с центром.

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР
Москва

Поступило
31 III 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ А. Poincaré, Les. méthode nouvelles de la mecanique celest, Paris, 1892—1899.
- ² А. Пуанкаре, О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями, 1947.
- ³ В. В. Немыцкий, В. В. Степанов, Качественная теория дифференциальных уравнений, 1947.
- ⁴ А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин, Теория колебаний, 1959.
- ⁵ В. С. Булдырев, Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова АН СССР, 115 (1971).
- ⁶ W. Lenz, Zur theore der Optische abbildung, Leipzig, 1928.
- ⁷ П. Е. Краснушкин, Метод нормальных волн в применении к проблеме дальних радиосвязей, М., 1947.
- ⁸ П. Е. Краснушкин, ЖТФ, 18, 4, 431 (1948).
- ⁹ Рэлей, Теория звука, 2, § 287, 1944.