

УДК 517.944

МАТЕМАТИКА

И. В. ГЕЛЬМАН, В. Г. МАЗЬЯ

ОЦЕНКИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 25 VI 1971)

В статье формулируются необходимые и достаточные условия справедливости следующих оценок для дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами в полупространстве $R_+^n = \{(x; t): x \in R^{n-1}, t \geq 0\}$:

$$\langle A(D)u \rangle^2 \leq C \left(\sum_{j=1}^N \|P_j(D)u\|^2 + \sum_{k=1}^r \langle B_k(D)u \rangle^2 \right), \quad (1)$$

$$\|A(D)u\|^2 \leq C \left(\|P(D)u\|^2 + \sum_{k=1}^r \langle B_k(D)u \rangle^2 \right), \quad (2)$$

$\|\cdot\|, \langle \cdot \rangle$ — нормы в $L_2(R_+^n)$ и $L_2(\partial R_+^n)$, $D = (\partial / \partial x_1, \dots, \partial / \partial x_{n-1}; \partial / \partial t)$.

Наши результаты в той или иной мере связаны с работами ⁽¹⁻⁵⁾, в которых можно найти дальнейшие ссылки.

1°. Пусть $P_1(\tau), P_2(\tau), \dots, P_N(\tau)$ — полиномы переменной $\tau \in R^1$ с комплексными коэффициентами и M — их максимальный порядок. Положим

$$\sum_{j=1}^N |P_j(\tau)|^2 = R_+(\tau) R_-(\tau), \quad (3)$$

где $R_+(\tau)$ — полином порядка M , все корни которого лежат в полуплоскости $\text{Im } \zeta \geq 0$, а $R_-(\tau) = \overline{R_+(\tau)}$. Обозначим через $\Pi_+(\tau)$, $\text{ord } \Pi_+(\tau) < M$, общий наибольший делитель полиномов $P_j(\tau), R_+(\tau)$ ($j = 1, 2, \dots, N$).

Лемма 1. Для любого полинома $Q(\tau)$, $\text{ord } Q(\tau) \leq M - 1$, $Q(\tau) \equiv 0 \pmod{\Pi_+(\tau)}$, существуют и определяются единственным образом такие полиномы $T_j(\tau)$, $T_j(\tau) \equiv 0 \pmod{\Pi_+(\tau)}$, $\text{ord } T_j(\tau) \leq M - 1$ ($j = 1, 2, \dots, N$), что

$$Q(\tau) R_-(\tau) = \sum_{j=1}^N P_j(\tau) T_j(\tau), \quad (4)$$

$$P_i(\tau) \overline{T_j(\tau)} \equiv P_j(\tau) \overline{T_i(\tau)} \pmod{R_+(\tau)} \quad (i \neq j, i, j = 1, 2, \dots, N). \quad (5')$$

Условие (5) снимается при $N = 1$. Заметим, что если $N = 2$ и полиномы $P_1(\tau), P_2(\tau)$ взаимно просты, то (5) является следствием (4).

Рассмотрим дифференциальные операторы в частных производных с постоянными комплексными коэффициентами $A(D), P_j(D), B_k(D)$ и соответствующие им полиномы $A(\xi; \tau), P_j(\xi; \tau), B_k(\xi; \tau)$, где $\xi \in R^{n-1}, \tau \in R^1$. Здесь и далее существенна полиномиальная зависимость только по переменной τ ; соответственно $\text{ord } G(\xi; \tau)$ означает порядок полинома $G(\xi; \tau)$ по τ . В этом смысле понимаются встречающиеся далее сравнения, термины «факторизация», «частное» и т. п. Предположим, что для всех $\xi \in R^{n-1}$

$$\text{ord } A(\xi; \tau), \text{ord } B_k(\xi; \tau) \leq \max_j \text{ord } P_j(\xi; \tau), \quad 1 \leq j \leq N, \quad 1 \leq k \leq r.$$

Введем, следуя равенству (3), полиномы $R_+(\xi; \tau), R_-(\xi; \tau)$ и обозначим через $\Pi_+(\xi; \tau)$ общий наибольший делитель полиномов $P_j(\xi; \tau), R_+(\xi; \tau)$ ($j = 1, 2, \dots, N$). Пусть $C_0^\infty(R_+^n)$ есть пространство сужений на R_+^n функций из $C_0^\infty(R^n)$.

Теорема 1. Для того чтобы для всех $u \in C_0^\infty(R_+^n)$ была справедлива оценка (1), необходимо и достаточно, чтобы

1) существовали такие функции $\beta_k(\xi)$, $\sum_{k=1}^r |\beta_k(\xi)|^2 \neq 0$, что

$$Q(\xi; \tau) = A(\xi; \tau) - \sum_{k=1}^r \beta_k(\xi) B_k(\xi; \tau) \equiv 0 \pmod{\Pi_+(\xi; \tau)} \quad (6)$$

для всех $\xi \in R^{n-1}$;

$$2) \sup_{\xi \in R^{n-1}} \inf_{\beta_k(\xi)} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sum_{j=1}^N |T_j(\xi; \tau)|^2}{\sum_{j=1}^N |P_j(\xi; \tau)|^2} d\tau + \sum_{k=1}^r |\beta_k(\xi)|^2 \right\} < \infty, \quad (7)$$

где $T_j(\xi; \tau)$ ($j = 1, 2, \dots, N$) — полиномы, удовлетворяющие (4), (5), и infimum взят по всем $\beta_k(\xi)$, входящим в сравнение (6). Левая часть (7) есть точная константа в (1).

Замечания. Пусть $\Pi_+^{(1)}(\xi; \tau)$ — общий наибольший делитель $\Pi_+(\xi; \tau)$ и $A(\xi; \tau)$; $\Pi_+^{(2)}(\xi; \tau) = \Pi_+(\xi; \tau) / \Pi_+^{(1)}(\xi; \tau)$; $s(\xi) = \text{ord } \Pi_+(\xi; \tau)$, $s_1(\xi) = \text{ord } \Pi_+^{(1)}(\xi; \tau)$; $r(\xi)$ — максимальное число полиномов $B_k(\xi; \tau)$, линейно независимых по модулю $\Pi_+(\xi; \tau)$; $m(\xi)$ — наибольший из порядков $B_k(\xi; \tau)$.

1. Сравнение (6) эквивалентно для всех $\xi \in R^{n-1}$ сравнениям

$$A(\xi; \tau) - \sum_{k=1}^r \beta_k(\xi) B_k(\xi; \tau) \equiv 0 \pmod{\Pi_+^{(2)}(\xi; \tau)}, \quad (6_1)$$

$$\sum_{k=1}^r \beta_k(\xi) B_k(\xi; \tau) \equiv 0 \pmod{\Pi_+^{(1)}(\xi; \tau)}. \quad (6_2)$$

2. Функции $\beta_k(\xi)$ в (6) определяются однозначно, если $r(\xi) = r$ для всех $\xi \in R^{n-1}$, и не могут быть однозначно определены, если $\min \{s(\xi) : \xi \in R^{n-1}\} < r$.

3. Пусть полиномы $B_k(\xi; \tau)$ ($k = 1, 2, \dots, r$) линейно независимы при всех $\xi \in R^{n-1}$. Если $\min \{m(\xi) - s_1(\xi) : \xi \in R^{n-1}\} < 0$, то оценка (1) невозможна.

В качестве следствий теоремы 1 приведем более просто формулируемые критерии справедливости оценок:

$$\langle A(D)u \rangle^2 \leq C \left(\|P(D)u\|^2 + \sum_{k=1}^r \langle B_k(D)u \rangle^2 \right), \quad (1')$$

$$\langle A(D)u \rangle^2 \leq C (\|P(D)u\|^2 + \|u\|^2). \quad (1'')$$

Пусть $P(\xi; \tau) = P_+(\xi; \tau) P_-(\xi; \tau)$, где корни $P_+(\xi; \tau)$ совпадают (с учетом кратностей) со всеми корнями полинома $P(\xi; \tau)$ в полуплоскости $\text{Im } \xi \geq 0$.

Следствие 1. Для того чтобы для всех $u \in C_0^\infty(R_+^n)$ была справедлива оценка (1'), необходимо и достаточно, чтобы

$$1) \text{ существовали такие функции } \beta_k(\xi), \sum_{k=1}^r |\beta_k(\xi)|^2 \neq 0, \text{ что}$$

$$Q(\xi; \tau) \equiv 0 \pmod{P_+(\xi; \tau)} \quad \text{для всех } \xi \in R^{n-1}, \quad (6')$$

$$2) \sup_{\xi \in R^{n-1}} \inf_{\beta_k(\xi)} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{Q(\xi; \tau)}{P(\xi; \tau)} \right|^2 d\tau + \sum_{k=1}^r |\beta_k(\xi)|^2 \right\} < \infty, \quad (7')$$

где $Q(\xi; \tau)$ определяется, как в (6), и infimum берется по всем функциям $\beta_k(\xi)$, удовлетворяющим (6'). Левая часть (7') — точная константа в (1').

Рассмотрим факторизацию $|P(\xi; \tau)|^2 + 1 = R_+(\xi; \tau) R_-(\xi; \tau)$ типа (3); будем считать, что старшие коэффициенты полиномов R_- и P совпадают.

Обозначим через $T_1(\xi; \tau)$ и $T_2(\xi; \tau)$ частное и остаток от деления $A(\xi; \tau)R_-(\xi; \tau)$ на $P(\xi; \tau)$.

Следствие 2. Для того чтобы для всех $u \in C_0^\infty(R_+^n)$ была справедлива оценка (1''), необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\sup_{\xi \in R^{n-1}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|T_1(\xi; \tau)|^2 + |T_2(\xi; \tau)|^2}{|P(\xi; \tau)|^2 + 1} d\tau < \infty. \quad (7'')$$

Левая часть (7'') есть точная константа в (1'').

Еще одно из возможных приложений — необходимое и достаточное условие непрерывности оператора вложения пространства функций, для которых $\|P(D)u\| + \|u\| < \infty$, в пространство $H_s(\partial R_+^n)$ С. Л. Соболева — Л. Н. Слободецкого. Именно, справедливо

Следствие 3. Неравенство

$$\langle u \rangle_{H_s(\partial R_+^n)}^2 \leq C (\|P(D)u\|^2 + \|u\|^2) \quad (8)$$

верно для всех $u \in C_0^\infty(R_+^n)$ в том и только в том случае, если

$$(1 + |\xi|^2)^{s/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|R_-(\xi; \tau) - P(\xi; \tau)|^2 + 1}{|P(\xi; \tau)|^2 + 1} d\tau \leq C. \quad (9)$$

(Условие (9) можно также переписать в виде

$$(1 + |\xi|^2)^{s/2} \operatorname{Im} \sum_{s=1}^M (r_s(\xi) - \pi_s(\xi)) \leq C,$$

где $\pi_1(\xi), \dots, \pi_M(\xi); r_1(\xi), \dots, r_M(\xi)$ — корни $P(\xi; \tau)$ и $R_-(\xi; \tau)$.)

Из (7''), разумеется, следует ограниченность интеграла

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|A(\xi; \tau)|^2}{|P(\xi; \tau)|^2 + 1} d\tau,$$

эквивалентная, как известно, справедливости оценки

$$\int_{R^{n-1}} |A(D)u|^2 dx \leq C \int_{R^n} (|P(D)u|^2 + |u|^2) dx dt$$

для всех $u \in C_0^\infty(R^n)$. На примере (9) для многочлена $P(\xi; \tau)$ первого порядка по τ легко проверяется, что обратное, вообще говоря, неверно.

2°. Пусть $A(\tau)$ и $P(\tau)$ — полиномы переменной $\tau \in R^1$, $\operatorname{ord} A(\tau) \leq \operatorname{ord} P(\tau)$. Положим $P(\tau) = P_+(\tau)P_-(\tau)$, где $P_+(\tau)$ — полином, корни которого совпадают со всеми корнями $P(\tau)$, расположенными в полуплоскости $\operatorname{Im} \xi \geq 0$. Обозначим через $\Delta(\tau)$ общий наибольший делитель $P_+(\tau)$ и $A(\tau)$, а через $P_+^{(1)}(\tau)$ — частное $P_+(\tau) / \Delta(\tau)$. Рассмотрим еще полиномы $B_1(\tau), \dots, B_r(\tau)$, где $r = \operatorname{ord} P^{(1)}(\tau)$. Пусть, наконец, $a(\tau)$ и $b_k(\tau)$ — остатки от деления $A(\tau)$ и $B_k(\tau)$ на $P_+(\tau)$ ($k = 1, 2, \dots, r$).

Лемма 2. Пусть полиномы $B_k(\tau)$ линейно независимы по модулю $P_+^{(1)}(\tau)$ и пусть $B_k(\tau) \equiv 0 \pmod{\Delta(\tau)}$ ($k = 1, 2, \dots, r$).

Тогда существуют и определяются однозначно полиномы $H_1(\tau), \dots, H_r(\tau)$ порядка не выше $r - 1$ такие, что для всех $\tau, \eta \in R^1$

$$H_k(\tau) \equiv 0 \pmod{\Delta(\tau)} \quad (k = 1, 2, \dots, r), \quad (10)$$

$$\sum_{k=1}^r H_k(\tau) b_k(\eta) = (\eta - \tau)^{-1} [P_+(\eta) a(\tau) - P_+(\tau) a(\eta)]. \quad (11)$$

Замечание. Полиномы $H_k(\tau)$, построенные в этой лемме, можно различными способами выразить явно. Например, $H_k(\tau) = W^{-1}[\gamma_k(\tau)a(\tau) - \delta_k(\tau)P_+(\tau)]$, где W — вронскиан полиномов $b_1(\tau), \dots, b_r(\tau)$; $\delta_k(\tau)$ — определитель, полученный заменой в W k -го столбца вектором $(a'(\tau), a''(\tau)/2, \dots, a^{(r)}(\tau)/r)$; $\gamma_k(\tau)$ — определитель, полученный заменой в $\delta_k(\tau)$ полинома $a(\tau)$ на $P_+(\tau)$.

Другое описание $H_k(\tau)$ состоит в следующем. Обозначим через $\pi(\tau, \eta)$ правую часть равенства (11) и через Γ — определитель Грама. Тогда

$$H_k(\tau) = \Gamma_k(\tau) / \Gamma [b_1 P_+^{-1}, \dots, b_r P_+^{-1}], \quad \Gamma_k(\tau) = \Gamma [b_1(\eta) P_+^{-1}(\eta), \dots, b_{k-1}(\eta) P_+^{-1}(\eta), \pi(\tau, \eta), b_{k+1}(\eta) P_+^{-1}(\eta), \dots, b_r(\eta) P_+^{-1}(\eta)].$$

Рассмотрим теперь дифференциальные операторы $A(D)$, $P(D)$ и соответствующие им полиномы $A(\xi; \tau)$, $P(\xi; \tau)$. Потребуем, чтобы порядок r полинома $P_+^{(1)}(\xi; \tau)$ не зависел от ξ . Введем еще операторы $B_1(D)$, ..., $B_r(D)$. Если полиномы $B_k(\xi; \tau)$ удовлетворяют для всех $\xi \in R^{n-1}$ условиям леммы 2, можно определить с помощью (10) и (11) полиномы $H_k(\xi; \tau)$. Построим две $r \times r$ -матрицы $H(\xi) = (h_{jk}(\xi))$ и $B(\xi) = (b_{jk}(\xi))$ с элементами

$$h_{jk}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{H_j(\xi; \tau) \overline{H_k(\xi; \tau)}}{|P_+(\xi; \tau)|^2} d\tau, \quad b_{jk}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{B_j^-(\xi; \tau) \overline{B_k^-(\xi; \tau)}}{|P_-(\xi; \tau)|^2} d\tau,$$

где $B_k^-(\xi; \tau)$ — полиномы, определяемые разложениями

$$\frac{B_k(\xi; \tau)}{P(\xi; \tau)} = \frac{B_k^+(\xi; \tau)}{P_+(\xi; \tau)} + \frac{B_k^-(\xi; \tau)}{P_-(\xi; \tau)}, \quad k = 1, 2, \dots, r.$$

Обозначим через $\lambda(\xi)$ наибольшее собственное число матрицы $H(\xi)B(\xi)$.

Теорема 2. Для того чтобы для всех $u \in C_0^\infty(R_+^n)$ была справедлива оценка (2), необходимо и достаточно, чтобы

1) полиномы $B_k(\xi; \tau)$ были линейно независимы по модулю $P_+^{(1)}(\xi; \tau)$ для всех $\xi \in R^{n-1}$;

2) $B_k(\xi; \tau) \equiv 0 \pmod{\Delta(\xi; \tau)}$ для всех $\xi \in R^{n-1}$;

$$3) \quad \left| \frac{A(\xi; \tau)}{P(\xi; \tau)} \right|^2 + \lambda^2(\xi) + \sum_{k=1}^r \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{H_k(\xi; \tau)}{P_+(\xi; \tau)} \right|^2 d\tau \leq \text{const} \quad \text{для всех } (\xi; \tau) \in R^h,$$

Следствие 4. Для того чтобы для всех $u \in C_0^\infty(R_+^n)$

$$\|A(D)u\| \leq C\|P(D)u\|,$$

необходимо и достаточно, чтобы были выполнены следующие условия:

1) $A(\xi; \tau) \equiv 0 \pmod{P_+(\xi; \tau)}$ для всех $\xi \in R^{n-1}$,

2) $|A(\xi; \tau)| \leq \text{const}|P(\xi; \tau)|$ для всех $(\xi; \tau) \in R^n$.

Следствие 5. Пусть $r = 1$ и $\zeta(\xi)$ — корень полинома $P_+^{(1)}(\xi; \tau)$. Для того чтобы для всех $u \in C_0^\infty(R_+^n)$ была справедлива оценка

$$\|A(D)u\|^2 \leq C(\|P(D)u\|^2 + \langle B(D)u \rangle^2),$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

1) $B(\xi, \zeta(\xi)) \neq 0$ для всех $\xi \in R^{n-1}$;

2) $B(\xi; \tau) \equiv 0 \pmod{\Delta(\xi; \tau)}$ для всех $\xi \in R^{n-1}$;

$$3) \quad \left| \frac{A(\xi; \tau)}{P(\xi; \tau)} \right|^2 + \frac{1}{\text{Im } \zeta(\xi)} \left| \frac{A(\xi; \zeta(\xi))}{B(\xi, \zeta(\xi))} \right|^2 \left(1 + \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{B^-(\xi, \eta)}{P_-(\xi; \eta)} \right|^2 d\eta \right) \leq \text{const}$$

для всех $(\xi; \tau) \in R^n$.

Ленинградская лесотехническая академия

им. С. М. Кирова

Ленинградский государственный университет

им. А. А. Жданова

Поступило

21 IV 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ N. Aronszajn, Conference on Partial Differential Equations, Univ. of Kansas, Rep. № 14, 94 (1954). ² Л. Хёрмандер, К теории общих дифференциальных операторов в частных производных, ИЛ, 1959. ³ С. Агмон, А. Дуглис, Л. Ниренберг, Оценки решений эллиптических уравнений вблизи границы, ИЛ, 1962. ⁴ M. Schechter, Trans. Am. Math. Soc., 107, № 2, 237 (1963). ⁵ M. Schechter, Ann. Scuola Norm. Super. Pisa, 18, № 3, 255 (1964).