**Доклады Академии наук СССР**
**1971. Том 200, № 6**

УДК 519.3:62-50 *КИБЕРНЕТИКА И ТЕОРИЯ РЕГУЛИРОВАНИЯ*

Л. А. КУН, Ю. Ф. ПРОНОЗИН

# К РЕГУЛЯРИЗАЦИИ МЕТОДА БЕЛЛМАНА В ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО БЫСТРОДЕЙСТВИЯ

*(Представлено академиком Б. Н. Петровым 5 III 1971)*

1. Рассматривается задача оптимального управления объектом, движение которого описывается уравнением

$$\dot{z} = f(z, u), \quad z \in R^n, \quad u \in U \subset R^n, \tag{1}$$

где $R^n$ — $n$-мерное эвклидово пространство, $U$ — область управления, $f$ — локально липшицевское отображение из $R^n \times U$ в $R^n$. Предполагается, кроме того, что отображение $f$ удовлетворяет условию Филиппова ([4]):

$$\langle z, f(z, u)\rangle \leqslant C(1 + \|z\|^2) \quad \text{при} \quad (z, u) \in R^n \times U,$$

где $\langle z, f(z, u)\rangle$ — скалярное произведение векторов $z$ и $f(z, u)$, $\|\cdot\|$ — эвклидова норма, $C$ — некоторое положительное число.

Требуется найти в классе кусочно-непрерывных * функций управление, переводящее объект (1) за минимальное время в начало координат пространства $R^n$.

Как известно ([1]), первоначальный подход к решению задачи оптимального управления, основанный на уравнении Беллмана, содержал в качестве одного из наиболее существенных моментов априорное предположение о существовании всюду непрерывно дифференцируемого решения уравнения Беллмана. Однако это предположение является весьма ограничительным и, как правило, не выполняется. В частности, во всех примерах, приведенных в ([1]), функция Беллмана оказывается недифференцируемой на некотором многообразии (содержащем в себе целые куски оптимальных траекторий). Это обстоятельство создает принципиальные трудности использования уравнения Беллмана в задачах оптимального управления.

В. Г. Болтянский в ([2]) дал обоснование подхода Беллмана как достаточного условия оптимальности при существенно более слабых предположениях относительно гладкости решения уравнения Беллмана. Суть этого обоснования заключается в том, что если «решение» уравнения Беллмана всюду непрерывно дифференцируемо, за исключением, быть может, некоторого «хорошего» множества, и существуют управления, реализующие, грубо говоря, это «решение», то оно («решение») является функцией Беллмана, а соответствующие управления являются оптимальными.

Ниже приводится теорема 1, которую можно рассматривать как попытку устранить трудности, связанные с недифференцируемостью функции Беллмана, иным способом. Именно, решение задачи оптимального управления сводится к нахождению всюду непрерывно дифференцируемого $\varepsilon$-решения (см. определение 1) уравнения Беллмана, а не «точного» его решения.

Можно показать, что в примерах монографии ([1]) существует $\varepsilon$-решение уравнения Беллмана (доказательство этого факта для одного из таких

---

* Управление $\mathfrak{A}: [\alpha, \beta] \to U$ будем называть кусочно-непрерывным, если оно непрерывно справа и множество всех его точек разрыва является вполне упорядоченным подмножеством отрезка $[\alpha, \beta]$.

примеров см. в [7]). Кроме того, теоремы 2 и 3 настоящей заметки устанавливают существование и дают метод построения $\varepsilon$-решения уравнения Беллмана для линейных задач с невырожденными (см. определение 4) областями управления. Эти факты позволяют надеяться на наличие широкого класса задач оптимального быстродействия, в которых существуют $\varepsilon$-решения уравнения Беллмана.

Отметим далее, что точный синтез (если он существует) в задачах оптимального управления оказывается, как правило, разрывной функцией. Поэтому нет уверенности, что применение такого синтеза обеспечивает единственность и непрерывную зависимость от начальных условий решения уравнения (1), что весьма важно в приложениях [3]. В связи с этим естественно ввести понятие $\varepsilon$-синтеза (см. определение 2). Можно показать, что в отмеченных выше примерах существует гладкая $\varepsilon$-синтезирующая функция несмотря на то, что точный синтез в этих примерах разрывной. Теоремы 2 и 3 настоящей заметки устанавливают существование гладкой $\varepsilon$-синтезирующей функции в линейных задачах с невырожденной областью управления.

Построение гладких $\varepsilon$-решения и $\varepsilon$-синтезирующей функции в линейных задачах с невырожденной областью управления основано на аппроксимации «изнутри» исходной области управления $U$ канонической (см. определение 3) областью управления $\tilde{U}$.

2. В дальнейшем, для простоты изложения предполагается, что область управляемости объекта (1) совпадает со всем пространством $R^n$.

Определение 1. Функцию $\tilde{\gamma}$: $R^n \to [0, +\infty)$, непрерывную в $R^n$ и непрерывно дифференцируемую в $R^n \setminus \{0\}$, будем называть *$\varepsilon$-решением* ($\varepsilon \geqslant 0$) уравнения Беллмана, если

$$|\inf_{u \in U} \langle \operatorname{grad} \tilde{\gamma}(z),\ f(z, u)\rangle + 1| \leqslant \varepsilon \quad \text{при } z \neq 0 \tag{2}$$

и $\tilde{\gamma}(0) = 0$.

Теорема 1. *Обобщенная* функция Беллмана $\gamma$ задачи* (1) *связана с $\varepsilon$-решением* ($0 \leqslant \varepsilon < 1$) *уравнения Беллмана неравенствами*

$$\frac{1}{1+\varepsilon}\tilde{\gamma}(z) \leqslant \gamma(z) \leqslant \frac{1}{1-\varepsilon}\tilde{\gamma}(z)$$

*при каждом* $z \in R^n$.

Нетрудно показать, что значение $\varepsilon$-решения уравнения Беллмана позволяет конструировать с помощью неравенства (2) кусочно-постоянные $\bar{\varepsilon}$-оптимальные ($\bar{\varepsilon}$ мало вместе с $\varepsilon$) управления, т. е. такие управления, которые переводят объект (1) из начального положения $z \neq 0$ в начало координат за время, не большее чем $(1 + \bar{\varepsilon})\gamma(z)$.

Таким образом, решение задачи оптимального управления сводится к нахождению $\varepsilon$-решения $\tilde{\gamma}$ уравнения Беллмана.

Определение 2. Функцию $\mathcal{U}$: $R^n \setminus \{0\} \to U$ будем называть *$\varepsilon$-синтезирующей* ($\varepsilon \geqslant 0$), если для каждого начального условия $z_0 \neq 0$ существует единственное и непрерывно зависящее от начального условия решение уравнения $\dot{z} = f(z, \mathcal{U}(z))$ и время $T(z_0)$ прихода объекта из $z_0$ в начало координат удовлетворяет неравенству $T(z_0) \leqslant (1 + \varepsilon)\gamma(z_0)$.

В следующем пункте показывается, что в линейных задачах с каноническими областями управления функция Беллмана и синтезирующая функция являются гладкими.

3. В этом и следующих пунктах предполагается, что $f(z, u) \equiv Az + u$, где $A$: $R^n \to R^n$ — линейный оператор.

---

* Так как оптимальное управление может не существовать, то можно говорить лишь об обобщенной [5] функции Беллмана.

Определение 3. Область управления $U$ будем называть канонической, если

а) $U$ есть $n$-мерный выпуклый компакт, содержащий начало координат в качестве внутренней точки,

б) граница $\partial U$ области управления есть дважды дифференцируемое $(n-1)$-мерное многообразие,

в) отображение $\nu$, определенное на $\partial U$ и сопоставляющее каждому $u \in \partial U$ внутреннюю единичную нормаль к $\partial U$, имеет в каждой точке $u \in \partial U$ невырожденную производную.

Последнее свойство означает, что в окрестности (относительно многообразия $\partial U$) каждой точки $u \in \partial U$ можно ввести такую локальную систему координат $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1})$, что производная отображения $\xi \to \nu(u(\xi))$ имеет ранг $n-1$.

Теорема 2*. *В линейной задаче с канонической областью управления функция Беллмана дважды непрерывно дифференцируема во всей области управляемости, за исключением начала координат. Кроме того, существует и непрерывно дифференцируема во всей области управляемости (кроме начала координат) синтезирующая функция.*

Доказательство этой теоремы основано на методе характеристик ([6]) решения уравнений с частными производными.

4. Определение 4. Область управления $U$ будем называть невырожденной, если $U$ является $n$-мерным выпуклым ограниченным множеством и содержит начало координат в качестве внутренней точки.

В этом пункте для простоты изложения оператор $A$ предполагается устойчивым **. Это предположение вместе с невырожденностью области управления $U$ обеспечивает совпадение области управляемости со всем пространством $R^n$ ***.

Обозначим через $\rho$ расстояние от начала координат до границы $\partial U$ области управления $U$.

Теорема 3. *Пусть в линейной задаче с устойчивым оператором $A$ область управления $U$ невырождена. Пусть, далее, зафиксировано некоторое число $\varepsilon > 0$ и $\tilde{U}$ — такая каноническая область управления, что $\tilde{U} \subset U$ и*

$$\sup_{u \in U} \min_{\tilde{u} \in \tilde{U}} \|u - \tilde{u}\| < \frac{\varepsilon\rho}{1+\varepsilon}.$$

*Тогда функция Беллмана $\tilde{\gamma}$ и синтезирующая функция $\tilde{\mathcal{U}}$ той же задачи, но с областью управления $\tilde{U}$ (см. теорему 2), являются соответственно $\varepsilon$-решением уравнения Беллмана и $\varepsilon$-синтезирующей функцией исходной задачи.*

5. В приложениях часто встречаются задачи, в которых область управления не является невырожденной (т. е. имеет размерность меньше $n$). Ясно, что описанный выше способ регуляризации с помощью аппроксимации «изнутри» в таких задачах неприменим, так как размерность канонической области управления равна $n$. Однако возможен и иной способ регуляризации метода Беллмана в линейных задачах оптимального управления, который основан на аппроксимации «извне» исходной области управления $U$ канонической областью управления $\tilde{U}$ с последующим проектированием области $\tilde{U}$ в исходную область $U$. Результатом этого способа регуляризации является построение функции $\tilde{\gamma}$, близкой к функции Беллмана $\gamma$, и непрерывных управлений, переводящих объект из начального

---

* В частном случае, когда область управления $U$ есть $n$-мерный эллипсоид, этот результат получен (другим методом) Н. Н. Красовским в работе ([8]).

** Оператор $A$ называется устойчивым, если каждое решение дифференциального уравнения $\dot{z} = Az$ ограничено на полуоси $[0, +\infty)$.

*** Можно доказать, что если внутренность области управляемости $G$ линейной задачи с устойчивым оператором содержит начало координат, то $G = R^n$ (ср. с теоремой 14 из ([1])).

положения $z$ в сколь угодно малую окрестность начала координат за время, не большее чем $\gamma(z)$.

Авторы выражают благодарность А. М. Летову за полезные замечания, высказанные при обсуждении этой работы.

Институт проблем управления
Москва

Поступило
8 XII 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. С. Понтрягин и др., Математическая теория оптимальных процессов, 1969. [2] В. Г. Болтянский, Изв. АН СССР, сер. матем., **28**, № 3, 481 (1964). [3] А. М. Летов, Дифференциальные уравнения, № 4 (1970). [4] А. Ф. Филиппов, Вестн. Моск. унив., сер. матем., № 2 (1959). [5] Н. Н. Петров, Дифференциальные уравнения, № 2 (1970). [6] Р. Курант, Уравнения с частными производными, ИЛ, 1964. [7] Л. А. Кун, Ю. Ф. Пронозин, Автоматика и телемеханика, № 9 (1971). [8] Н. Н. Красовский, ПММ, **23**, № 4 (1959).