Доклады Академии наук СССР
1971. Том 201, № 2

УДК 517.512.6 МАТЕМАТИКА

В. В. ЖУК

НЕКОТОРЫЕ ТОЧНЫЕ НЕРАВЕНСТВА МЕЖДУ РАВНОМЕРНЫМИ НАИЛУЧШИМИ ПРИБЛИЖЕНИЯМИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком Л. В. Канторовичем 27 IV 1971)

В заметке устанавливаются некоторые точные неравенства для равномерных приближений периодических функций. Полученные результаты соприкасаются с вопросом о точных постоянных в теореме Д. Джексона о наилучшем приближении непрерывных периодических функций.

1. Примем следующие обозначения и предположения. Все функции и числа вещественные. $\tilde{C}$ — пространство непрерывных 2π-периодических функций f с нормой $\|f\| = \max\limits_{x\in(-\infty,\infty)} |f(x)|$.

Пусть $r \geqslant 0$ — целое число. Тогда $\tilde{C}^{(r)}$ — множество всех функций $f \in \tilde{C}$, у которых r-я производная $f^{(r)}$ ($f^{(0)} = f$) принадлежит $\tilde{C}$. Пусть $f \in \tilde{C}$, k — натуральное число, $h \geqslant 0$. Полагаем

$$\omega_k(h, f) = \sup_{|t|\leqslant h} \left\| \sum_{p=0}^{k} (-1)^p \binom{k}{p} f(x + pt) \right\|,$$

$$E_n(f) = \min \|f - T_n\|,$$

где минимум берется по всем тригонометрическим полиномам T_n порядка не выше n. Запись $\max\left\{\begin{matrix} A, \\ B. \end{matrix}\right\}$ означает наибольшее из чисел A и B. Символ $\frac{0}{0}$ понимается как 0.

2. Определение. Пусть $n \geqslant 0$ — целое число, $h \geqslant 0$. Величину $\rho_n(h, f) = \sup\limits_{|t|\leqslant h} E_n(f(x + t/2) - f(x - t/2))$ будем называть E-модулем непрерывности первого порядка функции f, а величину $\gamma_n(h, f) = \sup\limits_{|t|\leqslant h} E_n(f(x+t) - 2f(x) + f(x-t))$ — E-модулем непрерывности второго порядка функции f.

Очевидно, для любой $f \in \tilde{C}$

$$\gamma_n(h, f) \leqslant 2\rho_n(h, f) \leqslant 4E_n(f), \quad \rho_n(h, f) \leqslant \omega_1(h, f),$$
$$\gamma_n(h, f) \leqslant \omega_2(h, f).$$

Хорошо известна

Теорема A (см., например, (1), стр. 302, 316). *Пусть $n \geqslant 0$, $r \geqslant 1$ — целые числа.*
Тогда

$$\sup_{f\in\tilde{C}^{(r)}} \frac{(n+1)^r E_n(f)}{E_n(f^{(r)})} = \sup_{f\in\tilde{C}^{(r)}} \frac{(n+1)^r E_n(f)}{\|f^{(r)}\|} = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k(r+1)}}{(2k+1)^{r+1}} = K_r.$$

Замечание. $K_1 = \pi/2$, $K_2 = \pi^2/8$, $K_3 = \pi^3/24$.

С помощью этой теоремы легко установить, что, если $f \in \tilde{C}^{(r)}$, $n \geqslant 0$ — целое число, $h \geqslant 0$, то

$$\gamma_n(h, f) \leqslant K_r (n+1)^{-r} \gamma_n(h, f^{(r)}), \quad \rho_n(h, f) \leqslant K_r (n+1)^{-r} \rho_n(h, f^{(r)}).$$

Можно показать, что, если $n \geqslant 0$ — целое число, $h \geqslant 0$, то
1) для любой $f \in \tilde{C}^{(1)}$ $\gamma_n(h, f) \leqslant h\rho_n(h, f')$,
2) для любой $f \in \tilde{C}^{(2)}$ $\gamma_n(h, f) \leqslant h^2 E_n(f'')$.

3. В дальнейшем полагаем

$$\rho_n(f) = \rho_n\left(\frac{\pi}{n+1}, f\right), \ \gamma_n(f) = \gamma_n\left(\frac{\pi}{n+1}, f\right).$$

Теорема 1. *Пусть $n \geqslant 0$ — целое число.*
Тогда 1) *если $f \in \widetilde{C}$, $\gamma > 0$, то*

$$E_n(f) \leqslant {}^1/_2\left(1 + \frac{1}{4\gamma^2}\right)\gamma_n\left(\frac{\gamma\pi}{n+1}, f\right); \tag{1}$$

2) *если $f \in \widetilde{C}^{(1)}$, то*

$$E_n(f') \leqslant \max\left\{\begin{matrix} \{{}^1/_2\rho_n(f) \sup\limits_{0<t\leqslant\pi/[2(n+1)]} t^{-1}\gamma_n(t, f')\}^{1/2}, \\ 2(n+1)\pi^{-1}\rho_n(f). \end{matrix}\right\}, \tag{2}$$

$$E_n(f') \leqslant \max\left\{\begin{matrix} 4^{-1}\{18\rho_n^2(f) \sup\limits_{0<t\leqslant\pi/[2(n+1)]} t^{-2}\gamma(t, f')\}^{1/3}, \\ \dfrac{3(n+1)}{2\pi}\rho_n(f). \end{matrix}\right\}; \tag{3}$$

3) *если $f \in \widetilde{C}^{(2)}$, то*

$$E_n(f'') \leqslant \max\left\{\begin{matrix} {}^1/_2\{{}^3/_2\gamma_n(f)\{\sup\limits_{0<t\leqslant\pi/(n-1)} t^{-1}\gamma_n(t, f'')\}^2\}^{1/3}, \\ 3(n+1)^2\pi^{-2}\gamma_n(f). \end{matrix}\right\}. \tag{4}$$

Неравенство (1) — обобщение классической теоремы Д. Джексона, дающей оценку наилучшего приближения посредством модуля непрерывности. Соотношения (2) — (4) — развитие неравенства Ж. Адамара * $\|f'\| \leqslant \{2\|f\|\,\|f''\|\}^{1/2}$, если $f \in \widetilde{C}^{(2)}$, применительно к наилучшим приближениям.

Замечание 1. Постоянная, стоящая перед знаком max (равная единице) в каждом из неравенств (2) — (4) и при каждом n на всем классе функций, рассматриваемом в условиях соответствующего неравенства, является точной.

Следствие 1. *Пусть $n \geqslant 0$ — целое число.*
Тогда 1) *если $f \in \widetilde{C}^{(2)}$, то*

$$E_n(f') \leqslant \{{}^1/_2\rho_n(f)\rho_n(f'')\}^{1/2}; \tag{5}$$

2) *если $f \in \widetilde{C}^{(3)}$, то*

$$E_n(f'') \leqslant {}^1/_2\{{}^3/_2\gamma_n(f)\rho_n^2(f''')\}^{1/3}. \tag{6}$$

Постоянные в неравенствах (5) *и* (6) *при каждом n точные.*

Следствие 2. *Пусть $n \geqslant 0$ — целое число.*
Тогда 1) *если $f \in \widetilde{C}^{(1)}$, то*

$$E_n(f') \leqslant \max\left\{\frac{\pi}{4(n+1)} \sup_{0<t\leqslant\pi/[2(n+1)]} t^{-1}\gamma_n(t, f'), 2(n+1)\pi^{-1}\rho_n(f)\right\}; \tag{7}$$

$$E_n(f') \leqslant \max\left\{\frac{\pi^2}{8(n+1)^2} \sup_{0<t\leqslant\pi/[2(n+1)]} t^{-2}\gamma_n(t, f'), \frac{3(n+1)}{2\pi}\rho_n(f)\right\}; \tag{8}$$

2) *если $f \in \widetilde{C}^{(2)}$, то*

$$E_n(f'') \leqslant \max\left\{\frac{\pi}{4(n+1)} \sup_{0<t\leqslant\pi/(n+1)} t^{-1}\gamma_n(t, f''), 3(n+1)^2\pi^{-2}\gamma_n(f)\right\}. \tag{9}$$

---

* Аналог неравенства Ж. Адамара — А. Н. Колмогорова (без точных постоянных) применительно к наилучшим приближениям см., например, в [illegible], стр. [illegible].

Постоянная, стоящая перед max (*равная единица*) *в каждом из неравенств* (7) — (9) *и при каждом* n, *точная.*

Хорошо известно (теорема A, $r=1$), что если $f\in\tilde{C}^{(1)}$, $n\geqslant 0$, то

$$E_n(f)\leqslant\frac{\pi}{2(n+1)}E_n(f'),$$

где постоянная $\pi/[2(n+1)]$ является точной при каждом n. Следствие 3 развивает этот результат.

Следствие 3. *Пусть* $f\in\tilde{C}^{(1)}$, $n\geqslant 0$ — *целое число. Тогда*

$$E_n(f)\leqslant\frac{\pi}{4(n+1)}\rho_n(f'); \qquad (10)$$

$$E_n(f)\leqslant\frac{\pi}{4(n+1)}\{{}^1/_2\rho_n^2(f')\gamma_n(f')\}^{1/3}. \qquad (11)$$

Постоянные в неравенствах (10) *и* (11) *при каждом* n *точные.*

Неравенство (10) — теорема Д. Джексона для E-модуля непрерывности первого порядка применительно к дифференцируемым функциям. Из него очевидным образом следует, что если $f\in\tilde{C}^{(1)}$, $n\geqslant 0$ — целое число, то

$$E_n(f)\leqslant\frac{\pi}{4(n+1)}\omega_1\left(\frac{\pi}{n+1},f'\right). \qquad (12)$$

Это классическая теорема Д. Джексона для дифференцируемых функций с точной постоянной. Соотношение (12) ранее было получено в ([2]).

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова

Поступило
27 IV 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Ф. Тиман, Теория приближения функций действительного переменного, М., 1960. [2] В. В. Жук, Изв. высш. учебн. завед., Математика, 5 (96), 24 (1970).