Доклады Академии наук СССР
1971. Том 201, № 2

УДК 519.46 *МАТЕМАТИКА*

Т. Н. КОНЮШИХИНА

РАЗЛОЖЕНИЕ КРОНЕКЕРОВСКОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ ДВУХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ОСНОВНОЙ СЕРИИ СПЕЦИАЛЬНОЙ ГРУППЫ МАТРИЦ ВТОРОГО ПОРЯДКА НАД ТЕЛОМ КВАТЕРНИОНОВ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 22 IV 1971)

1. Пусть $G = SL(n, \mathbf{H})$ — специальная группа матриц над телом кватернионов $\mathbf{H}$. Обозначим через D подгруппу диагональных матриц, через Z^+, Z^- — подгруппы верхних и нижних треугольных матриц с единицами на главной диагонали соответственно. Напомним (см. ([4])), как строится основная серия неприводимых унитарных представлений группы G. Каждое представление этой серии задается неприводимым унитарным представлением $\tau(\delta)$ подгруппы D (все представления τ конечномерны). Оно определяется следующим образом. Введем однородное пространство $\mathscr{H} = Z^+ \setminus G$. Каждый элемент $\delta \in D$ задает преобразование $h \to \delta h$ в $\mathscr{H}$, относящее смежному классу $h = Z^+g$ смежный класс $\delta h = \delta Z^+ g = Z^+ \delta g$. Заметим, что каждый смежный класс в $\mathscr{H}$ (за исключением подмногообразия смежных классов, имеющего более низкую размерность) содержит в точности по одному представителю вида δz, где $\delta \in D$, $z \in Z^-$; поэтому смежные классы $h \in \mathscr{H}$ можно отождествить с их представителями вида δz.

Пусть $\beta(\delta)$ — характер на D, определяемый из соотношения $\beta^{-1}(\delta) = d(\delta^{-1} z \delta) / dz$, где dz — инвариантная мера на Z^-. Представление группы G задается в пространстве функций $f(h)$ на $\mathscr{H}$ со значениями в V, где V — пространство представления $\tau(\delta)$, удовлетворяющих следующим условиям:

$$f(\delta h) = \beta^{-1/2}(\delta) \tau(\delta) f(h), \quad \|f\|^2 = \int |f(z)|^2 dz < \infty.$$

Операторы представления, которые мы будем обозначать через $T_\tau(g)$, определяются как операторы правого сдвига:

$$T_\tau(g) f(h) = f(hg).$$

Отметим, что группа D изоморфна прямому произведению $n-1$ экземпляров мультипликативной группы $\mathbf{R}_+^*$ вещественных положительных чисел и n экземпляров группы $SU(2)$ комплексных унитарных матриц второго порядка. Поэтому τ является тензорным произведением неприводимых представлений соответствующих групп. Следовательно, τ, а значит, и T_τ задается набором действительных чисел $\rho = (\rho_1, \ldots, \rho_{n-1})$ и набором неотрицательных целых чисел $l = (l_1, \ldots, l_n)$ *.

Все представления основной серии неприводимы. Два представления T_{τ_1} и T_{τ_2} эквивалентны тогда и только тогда, когда $\tau_2(\delta) = \tau_1(\delta^s)$, где δ^s получается из δ некоторой перестановкой s диагональных элементов.

Регулярное представление группы G разлагается на представления основной серии T_τ (формула Планшереля) **.

---

* Именно, ρ_k задает представление $x \to x^{i\rho_k}$ группы $\mathbf{R}_+^*$, а l_i задает представление группы $SU(2)$ ($l_i + 1$ равно размерности этого представления).

** Среди простых групп Ли, за исключением комплексных групп, наличие единственной основной серии присуще только группам $SL(n, \mathbf{H})$.

Приведем формулу Планшереля для $n = 2$.

$$\int |x(g)|^2 \, dg = \frac{1}{2\pi^{10}} \int \omega(\tau) \operatorname{Sp}(T_\tau(x)^* T_\tau(x)) \, d\tau.$$

Здесь $x(g)$ — скалярная функция на G, τ задается набором (ρ, l_1, l_2), ρ — вещественное число, l_1, l_2 — целые неотрицательные числа.

$$T_\tau(x) = \int x(g) \, T_\tau(g) \, dg,$$

$$\omega(\tau) = (l_1 + 1)(l_2 + 1)[\rho^2 + (l_1 - l_2)^2][\rho^2 + (l_1 + l_2 + 2)^2]. \qquad (1)$$

Интегрирование по τ означает суммирование по индексам l_1, l_2 и интегрирование по ρ.

2. В заметке строится для случая $n = 2$ разложение тензорного произведения $T_{\tau_1} \otimes T_{\tau_2}$ двух представлений основной серии. Решение этой задачи основывается на следующей теореме.

Теорема 1. *Пусть T_{τ_1} и T_{τ_2} — неприводимые унитарные представления основной серии группы G (см. п. 1).*

Тогда их тензорное произведение $T_{\tau_1} \otimes T_{\tau_2}$ эквивалентно представлению $T(g)$ группы G, индуцированному представлением $\tau(\delta) = \tau_1(\delta) \otimes \tau_2(\delta^s)$ диагональной подгруппы D, где $\delta = \operatorname{diag}(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n)$, $\delta^s = \operatorname{diag}(\delta_n, \delta_{n-1}, \ldots, \delta_1)$.

Напомним, что, по определению, $T(g)$ — представление в пространстве функций $f(g)$ на G со значениями в пространстве V представления $\tau(\delta)$, удовлетворяющих следующим условиям:

$$f(\delta g) = \tau(\delta) f(g), \qquad (2)$$

$$\|f\|^2 = \int\limits_{D \setminus G} |f(g)|^2 \, d\tilde{g} < \infty, \qquad (3)$$

где $\delta \in D$, знак $|\cdot|$ обозначает норму в пространстве представления τ, интегрирование ведется по инвариантной мере $d\tilde{g}$ на $D \setminus G$.

В силу теоремы 1 задача о разложении представления $T_{\tau_1} \otimes T_{\tau_2}$ сводится к задаче о разложении представления $T(g)$ группы G, индуцированного представлением $\tau(\delta) = \tau_1(\delta) \otimes \tau_2(\delta^s)$ подгруппы D. Заметим, что само представление $\tau(\delta)$ приводимо. Его разложение на неприводимые представления $\tau_i(\delta)$ хорошо известно (см. например ([1])). Соответственно (см. ([3])), представление $T(g)$ раскладывается в прямую сумму представлений $T_{\tau_i}(g)$, индуцированных неприводимыми представлениями $\tau_i(\delta)$. Поэтому достаточно рассмотреть представления группы G, индуцированные неприводимыми представлениями подгруппы D. Этой задачей для случая $n = 2$ мы и будем заниматься.

3. С этого момента G будем обозначать группу $SL(2, H)$. Продолжим функцию $\beta(\delta)$ с подгруппы D на $\mathscr{H}$. Мы полагаем, что $\beta(h) = \beta(\delta)$, если δ — представитель смежного класса $h \in \mathscr{H}$.

Пусть $\tau_0(\delta)$ — неприводимое унитарное представление подгруппы D, действующее в пространстве V_0, $T(g)$ — индуцированное им унитарное представление группы G, т. е. представление, действующее в пространстве функций $f(g)$ на G, удовлетворяющих условиям (2) и (3), записанных соответственно для $\tau_0(\delta)$.

Функцию $f(g)$ из пространства представления будем называть *D-финитной на группе G*, если образ $\operatorname{supp} f$ в $D \setminus G$ при естественном отображении $G \to D \setminus G$ является компактным множеством.

Сопоставим каждой D-финитной функции на G функцию $\varphi(h_1, h_2)$ на $\mathscr{H} \times \mathscr{H}$ по формуле

$$\varphi(h_1, h_2) = \beta(h_1) \int f(g_{h_1}^{-1} \zeta g_{h_2}) \, g\zeta, \qquad (4)$$

где g_{h_1}, g_{h_2} — представители смежных классов h_1 и h_2 соответственно, $\zeta \in Z^+$, $d\zeta$ — инвариантная мера на Z^+. Для D-финитной функции интеграл сходится и не зависит от выбора представителей g_{h_1} и g_{h_2}. Поскольку f принимает значения в V_0, то и φ принимает значения в V_0.

Положим далее

$$\Psi(h_1, h_2, \tau) = \beta^{-1/2}(h_1)\int\varphi(h_1, \delta h_2)\,\beta^{1/2}(\delta)\otimes\tau^*(\delta)\,d\delta, \tag{5}$$

где $\delta \in D$, $\tau(\delta)$ — произвольное неприводимое конечномерное представление группы D, действующее в пространстве V. В силу определения, Ψ есть функция со значениями в $V_0 \otimes \operatorname{Hom}(V, V)$.

Функции $\Psi(h_1, h_2, \tau)$ удовлетворяют соотношениям

a) $\Psi(\delta^{-1}h_1, h_2, \tau) = \Psi(h_1, h_2, \tau)\,[1\otimes\tau(\delta)]$,

b) $\Psi(h_1\delta, h_2, \tau) = \beta^{1/2}(\delta)\,[\overset{*}{\tau}_0(\delta)\otimes 1]\,\Psi(h_1, h_2, \tau)$,

c) $\Psi(h_1, \delta h_2, \tau) = \beta^{-1/2}(\delta)\,[1\otimes\tau(\delta)]\,\Psi(h_1, h_2, \tau)$,

d) $\Psi(h_1, h_2, \tau) = 0$, если четности $\dim V$ и $\dim V_0$ не совпадают.

Из соотношений a), b) следует, что $\Psi(h_1, h_2, \tau)$ полностью определяется заданием $\Psi(h_0, h, \tau)$, где h_0 — произвольный фиксированный элемент общего положения (поскольку любой элемент из $\mathscr{H}$, за исключением подмногообразия низшей размерности, представим в виде $h = \delta_1{}^{-1}h_0\delta_2$, где $\delta_1, \delta_2 \in D$).

Из определения функции Ψ и из соотношения c) следует, что Ψ принадлежит пространству $\underbrace{\mathscr{L}\oplus\ldots\oplus\mathscr{L}}_{N_\tau}$, где $\mathscr{L}$ обозначает пространство представления T_τ, $N_\tau = \dim V_0\cdot\dim V$, и преобразуется по соответствующему представлению:

$$T(g)\;\Psi(h_1, h_2, \tau) = \Psi(h_1, h_2, g, \tau).$$

Введем скалярное произведение в $V_0\otimes\operatorname{Hom}(V, V)$. В пространстве V_0 скалярное произведение задано. В пространстве $\operatorname{Hom}(V, V)$ скалярное произведение элементов A и B определим по формуле $(A, B) = \operatorname{Sp} AB^*$. Индуцированное им скалярное произведение в $V_0\otimes\operatorname{Hom}(V, V)$ будем обозначать $\langle\cdot, \cdot\rangle$. В частности, $\langle a\otimes A, \;b\otimes B\rangle = (a, b)\operatorname{Sp} AB^*$, где $a, b\in V_0$, (a, b) — скалярное произведение в V_0.

Теорема 2. *Пусть $\tau_0(\delta)$ — неприводимое унитарное представление подгруппы D, действующее в пространстве V_0, $f(g)$ — D-финитная функция из пространства представления группы $G = SL(2, \mathbf{H})$, индуцированного представлением τ_0, $\Psi(h_1, h_2, \tau)$ — функция, построенная по $f(g)$ согласно формулам* (4) *и* (5).

Тогда имеют место следующие формулы:

$$f(g) = \frac{1}{8\pi}\int\omega(\tau)\,\beta^{1/2}(zg)\operatorname{Sp}\Psi(z, zg, \tau)\,dz\,d\tau, \tag{6}$$

$$\int\limits_{D\setminus G}|f(g)|^2\,d\tilde{g} = \frac{1}{4\pi}\int\omega(\tau)\,\langle\Psi(z_0, z, \tau), \Psi(z_0, z, \tau)\rangle\,dz\,d\tau, \tag{7}$$

где $\omega(\tau)$ задается формулой (1),

$$\operatorname{Sp}\Psi(h_1, h_2, \tau) = \beta^{-1/2}(h_1)\int\varphi(h_1, \delta h_2)\,\beta^{1/2}(\delta)\operatorname{Sp}\tau^*(\delta)\,d\delta,$$

$z_0 = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$. *Знак $|\cdot|$ обозначает норму в V_0.* (Интегрирование слева ведется по инвариантной мере $d\tilde{g}$ на $D\setminus G$. Интегрирование по $\tau = (\rho, l_1, l_2)$ означает суммирование по l_1 и l_2 и интегрирование по ρ. При этом в силу соотношения d) интегрирование фактически ведется не по всем τ, а только по тем, для которых $\dim V$ имеет ту же четность, что и $\dim V_0$.)

4. Доказательство теоремы 2 основывается на методе орисфер, разработанном И. М. Гельфандом и М. И. Граевым (см., например, (2)), и на

формуле обращения следующего интегрального преобразования на группе G (см. ([4])):

$$J(t) = e^{-\varphi r} \int f(z^{-1} \zeta \widetilde{\delta}^{-1} t \widetilde{\delta} z)\, d\zeta\, d\delta\, dz,$$

где $f(g)$ — финитная бесконечно дифференцируемая функция на G, $t \in T$, T — максимальная коммутативная подгруппа в G, $t = \mathrm{diag}\,(r^{-1} e^{i\varphi}, r e^{i\psi})$, $\widetilde{\delta} \in T \setminus D$, $d\widetilde{\delta}$ — инвариантная мера на $T \setminus D$. Эта формула обращения имеет вид

$$f(e) = -\frac{1}{\pi^2} \mathscr{L} [\sin \varphi \cdot \sin \psi\, J(t)]_{t=e},$$

где $\mathscr{L}$ — некоторый дифференциальный оператор.

В заключение считаю своим приятным долгом выразить глубокую благодарность проф. М. И. Граеву за руководство работой.

Коломенский педагогический
институт

Поступило
16 IV 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. Я. Виленкин, Специальные функции и теория представлений групп, М., 1965. [2] И. М. Гельфанд, М. И. Граев, Тр. Московск. матем. общ., 8 (1959). [3] А. А. Кириллов, УМН, в. 4 (1962). [4] Т. Н. Конюшихина, Уч. зап. МОПИ, 262, в. 13 (1969).