

В. И. МАЛЫЙ, А. Б. ЕФИМОВ

ПОТЕРЯ УСТОЙЧИВОСТИ СТЕРЖНЯ ПРИ ПРОДОЛЬНОМ УДАРЕ

(Представлено академиком С. А. Христиановичем 26 I 1971)

Известно, что упругий прямолинейный полубесконечный стержень при продольном ударе по его торцу жестким телом, движущимся с постоянной скоростью, теряет устойчивость ^(1, 2). Исследование возникающей в этом случае формы потери устойчивости в ^(1, 2) основывалось на пренебрежении нестационарными явлениями, связанными с конечностью скорости продольной волны сжатия. После этого задача по существу приводится к рассмотренному ранее случаю ⁽³⁾ быстрого нагружения стержня постоянной сжимающей силой. В работе ⁽⁴⁾ предпринята попытка дать упрощенный метод определения формы потери устойчивости стержня как системы с «одной» степенью свободы. Близкие задачи анализировались численно в работах ⁽⁵⁻⁷⁾.

В данной работе получено точное решение задачи о развитии прогибов $w(x, t)$ упругого полубесконечного стержня при продольном ударе по его торцу телом, движущимся с постоянной скоростью v , с учетом инерции вращения и прогибов, вызванных перерезывающей силой. Определена также простая асимптотика формы потери устойчивости при больших временах. Система линеаризованных по $w(x, t)$ уравнений, начальные и краевые условия задачи имеют вид ⁽⁸⁾

$$\begin{aligned} \left(E \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) u(x, t) = 0, \quad u_{,x} = \frac{\partial}{\partial x} u(x, t), \quad x > 0, t > 0, \\ EI \frac{\partial^4}{\partial x^4} - \rho I \frac{E + nG}{nG} \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\rho^2 I}{nG} \frac{\partial^4}{\partial t^4} - Es \left(\frac{\partial}{\partial x} u_{,x} \frac{\partial}{\partial x} \right) + \rho s \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Big] w(x, t) = \\ = Es \frac{\partial}{\partial x} \left(u_{,x} \frac{dw_0}{dx} \right); \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} u(x, 0) = \frac{\partial}{\partial t} u(x, 0) = w(x, 0) = \frac{\partial}{\partial t} w(x, 0) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} w(x, 0) = \\ = \frac{\partial^3}{\partial t^3} w(x, 0) = 0, \quad x > 0, \end{aligned} \quad (2)$$

$$u(0, t) = vt, \quad w(0, t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} w(0, t) = 0 \quad t > 0,$$

где u — продольные смещения, $w_0 = w_0(x)$ — начальные несовершенства формы стержня, E , G и ρ — модуль Юнга, модуль сдвига и плотность материала стержня, I , s и n — соответственно момент инерции, площадь поперечного сечения и коэффициент, зависящий от его формы.

Теорема. Решение нелинейной системы (1) при граничных и начальных условиях (2) совпадает с решением линейной системы

$$\begin{aligned} \left(EI \frac{\partial^4}{\partial x^4} - \rho I \frac{E + nG}{nG} \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\rho^2 I}{nG} \frac{\partial^4}{\partial t^4} + Es \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \rho s \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) w(x, t) = \\ = Es \frac{\partial}{\partial x} \left(u_{,x} \frac{dw_0}{dx} \right), \end{aligned} \quad (3)$$

$$\left(E \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) u(x, t) = 0, \quad \varepsilon = \frac{v}{c}, \quad c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad x > 0, t > 0,$$

при начальных и граничных условиях (2).

Принцип доказательства теоремы основан на том, что максимальная скорость распространения возмущений и для системы (1), и для системы (3) равна скорости c продольных волн в стержне. Поэтому решения как задачи (1), (2), так и задачи (3), (2) обращаются в ноль для $x > ct$. При $x < ct$ имеем $u_{,x} = -\varepsilon$, так что сами уравнения (1) и (3) совпадают в области $x < ct$.

Благодаря сформулированной теореме, решение задачи (1), (2) удается получить с помощью преобразования Фурье по x и преобразования Лапласа по t :

$$w(x, t) = \int_0^{ct} B(x, y, t) \frac{dw_0(y)}{dy} dy; \quad (4)$$

$$B(x, y, t) = \frac{2\varepsilon sc^2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{k}{\Phi} \left[\frac{1 - \cos a_1(t - y/c)}{a_1^2} - \frac{1 - \cos a_2(t - y/c)}{a_2^2} \right] \sin kx \cos ky dk; \quad (5)$$

$$\Phi^2 = \left(I \frac{E + nG}{nG} k^2 + s \right)^2 - 4 \frac{EI}{nG} k^2 (Ik^2 - \varepsilon s), \quad (6)$$

$$a_{1,2}^2 = \frac{nG}{2\rho I} \left(I \frac{E + nG}{nG} k^2 + s \mp \Phi \right).$$

При этом

$$\Phi \geq s, \quad a_2^2 \geq \frac{nG}{\rho I} s, \quad \text{sign } a_1^2 = \text{sign } (Ik^2 - \varepsilon s). \quad (7)$$

Непосредственная проверка подтверждает, что $w = 0$ при $x > ct$.

Используя соотношения (6) и (7), нетрудно убедиться, что в выражении (5) для ядра $B(x, y, t)$ вторая дробь в квадратных скобках осциллирует, оставаясь ограниченной при больших t , тогда как первая дробь при $t \rightarrow \infty$ растет экспоненциально для значений k , находящихся в интервале $0 < k < \sqrt{\varepsilon s / I}$. По этой причине ядро $B(x, y, t)$ и сами поперечные прогибы $w(x, t)$ неограниченно возрастают при $t \rightarrow \infty$.

Асимптотическое поведение $B(x, y, t)$ при $t \rightarrow \infty$ нетрудно определить методом Лапласа⁽⁹⁾, если x и y остаются ограниченными некоторыми константами

$$0 \leq x \leq L, \quad 0 \leq y \leq L_1.$$

Для таких значений x и y получаем

$$B(x, y, t) \sim B^*(x, y, t), \quad t \rightarrow \infty,$$

$$B^*(x, y, t) = 2 \frac{\varepsilon sc^2 k_m}{\Phi_m |a_m|^2} \sin k_m x \cos k_m y \frac{e^{\frac{1}{2} a_m |t - y/c|}}{\sqrt{2\pi |a_m''| t}},$$

где k_m — положение отрицательного минимума функции $a_1^2(k)$, а константы Φ_m , a_m и a_m'' равны $\Phi(k_m)$, $a_1(k_m)$ и $\frac{d^2}{dk^2} a_1(k_m)$ соответственно. Построим формально выражение

$$w^*(x, t) = \int_0^{\infty} B^*(x, y, t) \frac{dw_0(y)}{dy} dy.$$

Опуская громоздкие выкладки, укажем, что справедлива асимптотическая оценка

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sqrt{t} e^{-\frac{1}{2} a_m |t|} |w(x, t) - w^*(x, t)| = 0, \quad 0 \leq x \leq L.$$

Поэтому с точностью до величин порядка $O(t^{-1/2}e^{|a_m|t})$ асимптотика формы потери устойчивости стержня при больших временах имеет вид

$$w(x, t) \sim \varepsilon \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{sc^2 k_m}{\Phi_m |a_m|^2} \sin k_m x \frac{e^{|a_m|t}}{\sqrt{|a_m''|t}} \int_0^\infty \frac{dw_0(y)}{dy} e^{-|a_m|y/c} \cos k_m y dy.$$

Для металлических стержней продольная деформация $u_x = -\varepsilon$ в пределах упругости является малой величиной. Это обстоятельство позволяет получить простые явные формулы для констант k_m , Φ_m , $|a_m|$ и $|a_m''|$ с погрешностью менее 0,5%:

$$k_m \approx \sqrt{\frac{\varepsilon s}{2I}}, \quad \Phi_m \approx s, \quad |a_m| \approx \frac{\varepsilon c}{2} \sqrt{\frac{s}{I}}, \quad |a_m''| \approx 4c \sqrt{\frac{I}{s}}.$$

Всесоюзный научно-исследовательский институт
физико-технических и радиотехнических измерений
Менделеево Моск. обл.

Поступило
20 I 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Б. М. Малышев, Инж. журн., МТТ, № 4, 137 (1966). ² Г. Е. Линдберг, Прикл. мех., 32, № 2, 67 (1965). ³ М. А. Лаврентьев, А. Ю. Ишлинский, ДАН, 64, № 6, 779 (1949). ⁴ В. М. Корнев, Журн. прикл. мех. и техн. физ., № 3, 63 (1968). ⁵ E. Sevin, J. Appl. Mech., 27, № 1, 125 (1960). ⁶ N. Huffington, AIAA J., 1, № 9, 2099 (1963). ⁷ А. С. Вольмир, И. Г. Кильдибеков, ДАН, 167, № 4, 776 (1966). ⁸ А. С. Вольмир, Устойчивость деформируемых систем, М., 1967. ⁹ Н. Г. де Брёйн, Асимптотические методы в анализе, М., 1961.