Доклады Академии наук СССР
1971. Том 201, № 2

УДК 513.838 *МАТЕМАТИКА*

О. В. МАНТУРОВ

# ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ВЕКТОРНЫХ ПУЧКОВ НАД КОМПАКТНЫМИ ОДНОРОДНЫМИ ПРОСТРАНСТВАМИ

*(Представлено академиком И. Г. Петровским 21 IV 1971)*

1. Нашей целью является описание двух конструкций $A$ и $B$, позволяющих строить геометрические модели комплексных векторных расслоений (пучков) над компактными однородными пространствами, а также указание приложений полученных результатов к некоторым вопросам геометрии и топологии компактных однородных пространств.

Геометрической моделью комплексного векторного пучка $\xi$ размерности $m$ над компактным однородным пространством $V = G/H$ ($G$ и $H$ — компактные группы Ли) мы называем непрерывную функцию $f$, относящую каждой точке $x \in V$ подпространство $l_m$ размерности $m$ в $C^N$ ($N$ велико), принимаемое за слой над точкой $x \in V$, требуя при этом, чтобы построенный таким образом пучок был эквивалентен исходному пучку $\xi$. Другими словами, геометрическая модель пучка $\xi$ есть отображение

$$f\colon V \to G_{N,\,m} \qquad (N \text{ велико}) \tag{1}$$

такое, что $\xi = f^*\eta$, где $\eta$ — универсальный пучок над $G_{N,\,m}$.

Описание упомянутых конструкций дается в терминах теории представлений компактных групп Ли.

В рассматриваемых примерах удается построить таким образом все мультипликативные образующие кольца $(K_C{}^*(V) \otimes Q$ ($Q$ — рациональные числа), а иногда даже $K_C{}^*(V)$. (Определение и свойства $K_C{}^*(V)$ см. в ([1])). При этом алгебраическая структура $K_C{}^*(V)$ или $K_C{}^*(V) \otimes Q$ наполняется явным геометрическим содержанием. Для всех конструируемых нами элементов из $K_C{}^*(V)$ вычисляется характер Черна, задаваемый в терминах коэффициентов Дынкина, которые в простых случаях могут быть явно выписаны.

Вопрос о возможности полного описания мультипликативных образующих $K_C{}^*(V) \otimes Q$ с помощью этих конструкций решается положительно для широкого класса пространств, но не изложен в настоящей заметке.

2. Как известно, кольцо $K_C{}^*(X)$ является $Z_2$-градуированным ($X$-конечный клеточный комплекс): $K_C{}^*(X) = K^0(X) + K^1(X)$, $K^0K^0 \subset K^0$, $\tilde{K}^0K^1 \subset \subset \tilde{K}^1$, $K^1K^1 \subset K^0$. При этом кольцо $K^0(X)$ есть (допуская некоторое огрубление) кольцо стабильных виртуальных векторных пучков над $X$, а абелева группа $K^1(X)$ есть группа нульмерных стабильных виртуальных пучков над $\Sigma X$-надстройкой над $X$. Далее, элементы из $\tilde{K}^0(X)$ — подкольца $K^0(X)$, состоящего из нульмерных элементов, находится во взаимно однозначном соответствии с гомотопическими классами отображений

$$f\colon X \to G_{N,\,n} \tag{2}$$

($N$, $n$ велики, $N \gg n$). Элементы из $K^1(X)$ взаимно однозначно соответствуют гомотопическим классам отображений

$$g\colon X \to U(N). \tag{3}$$



311992

Пусть $X = V$ — компактное однородное пространство группы Ли; можно считать [10], что $V = G / H$, где $G$ и $H$ — компактные группы Ли.

Описание конструкции $A$. Пусть $\Theta$ — виртуальное (нульмерное) представление группы движений $G$ такое, что $\Theta(H) = 0$ в кольце представлений группы $H$, пусть далее $\Theta = \Phi - \Psi$, где $\Phi$ и $\Psi$ — геометрические представления. Определим

$$\gamma(\Theta) : V \to U(N), \tag{4}$$

положив

$$\gamma(\Theta)(gH) = \Phi(g)\Psi^{-1}(g). \tag{5}$$

(Правую часть (5) следует понимать как произведение матриц соответствующих унитарных представлений в фиксированном базисе; отображение $\gamma(\Theta)$ корректно.)

Таким образом, всякое виртуальное нульмерное представление $\Theta$ группы $G$ с условием $\Theta(H) = 0$ порождает элемент из $K^1(G / H)$.

Описание конструкции $B$. Пусть $\Phi$ — некоторое геометрическое представление группы $G$ такое, что $\Phi(H)$ приводимо, и $l_m$ — приводящее подпространство. Определим отображение

$$\delta(\Phi, l_m) : V \to G_{N,m} \tag{6}$$

формулой

$$\delta(\Phi, l_m)(gH) = \Phi(g) l_m. \tag{7}$$

Отображение $\delta(\Phi, l_m)$ корректно определено. Тем самым для каждого $\Phi$, удовлетворяющего указанному выше условию, построена геометрическая модель некоторого пучка.

Отображения, похожие на $\delta(\Phi, l_m)$, изучались П. К. Рашевским в [7].

Заметим, что конструкция $A$ и $B$ применимы к построению моделей элементов $Z_8$-градуированного кольца $K_R(X)$ из $K_R^0(X)$ и $K_R^1(X)$.

3. В этом пункте мы рассмотрим несколько однородных пространств, вычислим для них отображения $\gamma(\Theta)$ и $\delta(\Phi, l_m)$ при специально подобранных $\Theta$ и $\Phi$. Этим способом будут получены все мультипликативные образующие $K_C^*(V) \otimes Q$, а для комплексных пространств Штифеля — даже образующие $K_C^*(V)$. Параллельно построению геометрических моделей мы вычисляем характеры Черна $\mathrm{ch}$ соответствующих пучков. Последние вычисления основаны на следующих фактах.

Теорема 1. *Пусть $\Phi$ — геометрическое представление унитарной группы $SU(n)$ размерности $N$. Рассмотрим $SU(n)$ как однородное пространство $SU(n) / e$ ($e$ — единица группы).*

*Тогда*

$$\mathrm{ch}\,\gamma(\Phi - N) = C_2(\Phi) x_3 - C_3(\Phi) \frac{x_5}{2!} + C_4(\Phi) \frac{x_7}{3!} + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^n C_n(\Phi) \frac{x_{2n-1}}{(n-1)!}. \tag{8}$$

*Здесь $N = \dim \Phi$ означает $N$-мерное тривиальное представление $SU(n)$, $C_2(\Phi)$, $C_3(\Phi)$, $\ldots$, $C_n(\Phi)$ — коэффициенты Дынкина представления $\Phi$, $x_3$, $x_5$, $\ldots$, $x_{2n-1}$ — образующие кольца $H^*(SU(n), Z)$.*

Пусть $V = SU(n) / SU(k)$. Рассмотрим выражение $\Lambda_t = \Lambda_0 + \Lambda_1 t + \ldots + \Lambda_n t^n$, где $\Lambda_i$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ — представления $SU(n)$ в $i$-валентных кососимметрических тензорах. Обозначим через $M_p$, $p = 0, 1, \ldots, n-2$, следующие виртуальные представления группы $SU(n)$:

$$M_p = (-1)^{n+p-1} \frac{\Lambda_{-1}^{(p)}}{(p-1)!}, \tag{9}$$

где $\Lambda_t^{(p)}$ означает $p$-ю производную от $\Lambda_t$. Имеет место

Теорема 2. *Виртуальные представления $M_p$ равны нулю на $SU(k)$, $p = 0, 1, \ldots, n-k-1$.*

Так что $M_0, M_1, \ldots, M_{n-k-1}$ суть виртуальные представления, удовлетворяющие условиям применимости конструкции $A$.

Теорема 3. *Характеры Черна* $\operatorname{ch}\gamma(M_p)$, $p = 0, 1, \ldots, n-2$, *на группе* $SU(n)$ *имеют вид*

$$\begin{array}{c} \\ \operatorname{ch} M_0 \\ \operatorname{ch} M_1 \\ \operatorname{ch} M_2 \\ \ldots \\ \operatorname{ch} M_{n-4} \\ \operatorname{ch} M_{n-3} \\ \operatorname{ch} M_{n-2} \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_3 & x_5 & x_7 \ \ldots & x_{2n-5} & x_{2n-3} & x_{2n-1} \end{array} \\
\left(\begin{array}{cccccc}
 & & & & & 1 \\
 & 0 & & & 1 & a_{1n} \\
 & & & 1 & a_{1n-1} & a_{2n} \\
 & & & \cdot & \cdot & \cdot \\
 & & 1 \ \cdot & & \cdot & \cdot \\
 & 1 & a_{14} \ \ldots & a_{n-5,n-2} & a_{n-4,n-1} & a_{n-3,n} \\
1 & a_{13} & a_{24} \ \ldots & a_{n-4,n-2} & a_{n-3,n-1} & a_{n-2,n}
\end{array}\right)\end{array}, \qquad (10)$$

*где числа* $a_{ij}$ *являются первыми коэффициентами разложения*

$$[(\ln(1+z))/z]^{-j} = 1 + a_{1j}z + a_{2j}z^2 + \ldots + a_{j-2,\,j}z^{j-2} + \ldots \qquad (11)$$

*Характеры Черна* $\operatorname{ch}\gamma(M_p)$ *на* $SU(n)/SU(k)$ *определяются первыми* $n-k$ *строками матрицы. Пучки* $\gamma(M_0), \gamma(M_1), \ldots, \gamma(M_{n-k-1})$ *являются мультипликативными образующими* $K_C^*(V)$.

Доказательство этой теоремы основано на исследовании коэффициентов Дынкина представлений $\Lambda_i$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, проведенном в ([3], [4]), а также на одном варианте теоремы Римана — Роха, используемом аналогично ([1]), стр. 235.

Теорема 4. *Кольцо* $K_C^*(V) \otimes Q$, *где* $V = SU(n)/SO(n)$, *имеет следующие мультипликативные образующие*:

$$\gamma(\Lambda_k - \Lambda_{n-k-1}), \quad k < n-k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

*а также в случае четного* $n$

$$\delta(\Lambda_{n/2}, l),$$

*где* $l$ — *одно из двух неприводимых подпространств представления* $\Lambda_{n/2}(SO(n))$.

Можно проверить, что образующие в $K_C^*(V) \otimes Q$ для пространств $SU(2n)/Sp(n)$, $SO(2n)/U(n)$, $U(n)/U(n_1) \times \ldots \times U(n_k)$, $Sp(n)/Sp(n_1) \times \ldots \times Sp(n_k)$ и других имеют вид $\gamma(\Theta)$, $\delta(\Phi, l)$, т. е. допускают геометрические модели, построенные с помощью конструкций $A, B$. Проверка использует вычисленные А. Борелем когомологии этих пространств ([5]). Что касается непримитивных элементов, то их геометрические модели довольно просто строятся, исходя из определений, за исключением случая, связанного с умножением $K^1 \cdot K^1 \subset K^0$, подробно изученному в ([6]).

4. Укажем несколько возможных приложений полученных результатов.

1) Теоремы о неразложимости однородных пространств в прямое произведение и об отсутствии сечений в расслоениях однородных пространств. Пусть a) $V = X \times Y$ или b) $V \xrightarrow{X} Y$. Тогда образующие кольца $H^*(V, Z)$ делятся на две группы в случае a): те, которые проектируются в $X$, и те, которые проектируются в $Y$, причем образы проекций являются образующими элементами в $H^*(X, Z)$, $H^*(Y, Z)$. Пусть $k, l$ — наименьшие степени образующих элементов $H^*(X, Z)$, нетривиально проектирующихся в $H^*(X, Z)$ и $H^*(Y, Z)$. Рассмотрим $k$-е и $l$-е компоненты $\operatorname{ch}^{(k)}$ и $\operatorname{ch}^{(l)}$ от полного набора образующих в $K_C^*(V) \otimes Q$, построенного с помощью $A$ и $B$. Известно, что первая нетривиальная компонента ch любого элемента из $K_C^*(V)$ есть целочисленный класс когомологий. Это условие является сильным ограничением. (В случае b) имеем $\operatorname{ch}^{(l)}$-целочисленный класс).

Пусть $V = SU(n) / SU(k)$ и $Y = S^{2n-1}$. Для существования прямого разложения $V = X \times Y$ или даже сечения в $V \xrightarrow{X} Y$ необходимо, чтобы числа $a_{1n}, a_{2n}, \ldots, a_{k-2,n}$ были целые. Очевидно, это имеет место тогда и только тогда, когда $n$ кратно $M_k$, где $M_k$ есть соответствующее число Атья — Джеймса $F$ ([8–9], [11]), Задача о существовании сечений в естественных расслоениях $E \to B$, где $F = SU(m) / SU(k)$, $E = SU(n) / SU(k)$, $B = SU(n) / SU(m)$ была решена в ([12]). Указанные выше методы позволяют доказать теоремы о неразложимости большинства штифелевых многообразий в прямое произведение любых двух конечных клеточных комплексов, а также теоремы об отсутствии сечений. Те случаи, в которых упомянутые необходимые условия выполняются, обычно сопровождаются причудливыми арифметическими соотношениями между $n$ и $k$.

2) Определение геометрической размерности заданного пучка $\xi$ см. ([8]). Явное вычисление характера $\mathrm{ch}\,\xi$ и способ задания $\xi$ позволяют, вообще говоря, вычислить операции $\Psi^h$, а также $\gamma_t$, что дает решение задачи.

3) Вычисление классов Черна, классов и чисел Понтрягина. Явное задание отображений $\gamma(\Theta)$ и $\delta(\Phi, l)$, определяющих пучок, а также вычисление коэффициентов Дынкина дают возможность в ряде случаев вычислить упомянутые инварианты.

Московский кооперативный институт

Поступило 15 IV 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. Атья, Лекции по $K$-теории, М., 1967. [2] Е. Б. Дынкин, Матем. сборн., **35** (77), 1, 129 (1954). [3] О. В. Мантуров, Тр. сем. по векторному и тензорному анализу, 14, 20, (1968). [4] О. В. Мантуров, Тр. сем. по векторному и тензорному анализу, 15, 119 (1970). [5] А. Борель, Сборн. Расслоенные пространства и их приложения, ИЛ, 1958, стр. 163. [6] О. В. Мантуров, Изв. АН СССР, матем., **35**, 3, 626 (1971). [7] П. К. Рашевский, Матем. сборн., **50**, (92), 2, 171 (1960). [8] Дж. Адамс, Г. Уолкер, Сборн. пер. Математика, **11**, 4, 41 (1967). [9] M. F. Atiyah, Topology, **1**, 2, 125 (1962). [10] D. Montgomery, Proc. Am. Math. Soc., **1**, 4, 467 (1950). [11] I. M. James, Proc. London Math. Soc., **56**, 342 (1960). [12] Suter Ulrich, Diss. Dokt. Math. Eidgenoss, Techn. Hochshule, Zürich, 1968.