

УДК 533.7

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Н. Б. МАСЛОВА, Р. П. ЧУБЕНКО

ПРЕДЕЛЬНЫЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ БОЛЬЦМАНА

(Представлено академиком В. И. Смирновым 28 VI 1971)

Пусть $f(\mathbf{u}, t)$ — распределение молекул в одноатомном разреженном газе по скоростям $\mathbf{u}$ в момент времени t . При хорошо известных предположениях функция f должна быть решением уравнения Больцмана

$$\frac{\partial}{\partial t} f(\mathbf{u}, t) = \Phi(\mathbf{u}, t) - f(\mathbf{u}, t) Q(\mathbf{u}, t), \quad (1)$$

где

$$\Phi(\mathbf{u}, t) = \int_{\Omega} d\mathbf{u}_1 \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{2\pi} d\varepsilon f(\mathbf{u}', t) f(\mathbf{u}'_1, t) B(|\mathbf{u} - \mathbf{u}_1|, \theta), \quad (2)$$

$$Q(\mathbf{u}, t) = \int_{\Omega} d\mathbf{u}_1 \left[2\pi \int_0^{\pi/2} d\theta B(|\mathbf{u} - \mathbf{u}_1|, \theta) \right] f(\mathbf{u}_1, t), \quad (3)$$

$$\Omega = \{\mathbf{u}: -\infty < u_x < +\infty, -\infty < u_y < +\infty, -\infty < u_z < +\infty\}$$

$$\mathbf{u}' = \mathbf{u} + \alpha(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}, \alpha); \quad \mathbf{u}'_1 = \mathbf{u}_1 - \alpha(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}, \alpha), \quad d\mathbf{u} = du_x du_y du_z.$$

В системе координат с осью z , направленной по $\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}$, вектор α имеет составляющие $\alpha_x = \cos \varepsilon \sin \theta$, $\alpha_y = \sin \varepsilon \sin \theta$, $\alpha_z = \cos \theta$; $B(|\mathbf{u} - \mathbf{u}_1|, \theta)$ — неотрицательная функция, которая однозначно определяется законом межмолекулярного взаимодействия. Положим

$$n = \int_{\Omega} f(\mathbf{u}, 0) d\mathbf{u}, \quad n\mathbf{U} = \int_{\Omega} \mathbf{u} f(\mathbf{u}, 0) d\mathbf{u}, \quad \frac{3}{2} knT = \int_{\Omega} \frac{m}{2} (\mathbf{u} - \mathbf{U})^2 f(\mathbf{u}, 0) d\mathbf{u},$$

$$M(\mathbf{u}) = n \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp \left\{ -\frac{m(\mathbf{u} - \mathbf{U})^2}{2kT} \right\}. \quad (4)$$

С физической точки зрения естественно ожидать, что при весьма слабых ограничениях на начальное распределение и на закон межмолекулярного взаимодействия (т. е. на функции B) выполняется соотношение $f(\mathbf{u}, t) \rightarrow M(\mathbf{u})$ при $t \rightarrow \infty$. Эта гипотеза широко используется, однако справедливость ее доказана, наоборот, лишь при сильных ограничениях либо на начальные условия, либо на функции B . Первые (и наиболее глубокие) результаты в этом направлении принадлежат Карлеману ^(1, 2), который изучал газ, состоящий из упругих шаров ($B = |\mathbf{u} - \mathbf{u}_1| \cos \theta \sin \theta$).

На самом деле все результаты, сформулированные в ⁽²⁾, допускают естественное обобщение на более широкий класс функций B . Будем (следуя ⁽³⁾) рассматривать функции B , удовлетворяющие следующим условиям:

$$B(|\mathbf{u} - \mathbf{u}_1|, \theta) = |\mathbf{u} - \mathbf{u}_1|^{1-\gamma} \beta_{\gamma}(\theta) \cos \theta \sin \theta,$$

$$\gamma \in [0, 1), \quad 0 < C_{0\gamma} \leq \beta_{\gamma}(\theta) \leq C_{1\gamma} < \infty;$$

$\beta_{\gamma}(\theta)$ непрерывна на $[0, \pi/2]$. Описанные условия выполняются, если межмолекулярный потенциал имеет вид $U = Kr^{-s}$, $s > 4$, во всех столкновениях, за исключением скользящих, а скользящие столкновения происходят по законам взаимодействия упругих шаров. Тогда справедливы следующие утверждения.

Теорема 1. Пусть $f_0(\mathbf{u})$ — непрерывная функция, удовлетворяющая условиям

$$f_0(\mathbf{u}) \geq 0, \quad \sup_{\mathbf{u} \in \Omega} f_0(\mathbf{u}) (1 + u^2)^{\kappa/2} < \infty, \\ \kappa > \max \left\{ 5, 2 + 2 \sup_{\theta \in [0, \pi/2]} \beta_\gamma(\theta) \left[\int_0^{\pi/2} \beta_\gamma(\theta) \cos \theta \sin \theta d\theta \right]^{-1} \right\}. \quad (5)$$

Тогда при всех положительных t существует решение уравнения Больцмана (1), непрерывное по $\mathbf{u}$ в Ω и удовлетворяющее условиям

$$f(\mathbf{u}, 0) = f_0(\mathbf{u}), \\ 0 \leq f(\mathbf{u}, t) \leq c(1 + u^2)^{-\kappa/2}, \quad (6)$$

где c — постоянная, не зависящая от t и $\mathbf{u}$. Не существует другого решения уравнения (1), имеющего те же начальные условия и удовлетворяющего на каком-нибудь промежутке $[0, t_1]$, $t_1 > 0$, условию

$$|f(\mathbf{u}, t)| < C(1 + u^2)^{-\kappa/2}.$$

Теорема 2. Если $f_0(\mathbf{u}) \not\equiv 0$, то в условиях теоремы 1 для любых ε , t_0 , t_1 таких, что $\varepsilon > 0$, $0 < t_0 \leq t_1 < \infty$ существует постоянная $K \equiv K(t_0, t_1, \varepsilon)$ такая, что

$$f(\mathbf{u}, t) > \exp\{-K(1 + u^2)^{1+\varepsilon}\} \quad \text{при} \quad t \in [t_0, t_1].$$

Теорема 3. В условиях теоремы 1 для любого положительного ε существует такое положительное число $\delta(\varepsilon)$, не зависящее от t , что

$$|f(\mathbf{u}, t) - f(\mathbf{v}, t)| < \varepsilon,$$

если $|\mathbf{u} - \mathbf{v}| < \delta(\varepsilon)$, $\mathbf{u} \in \Omega$, $\mathbf{v} \in \Omega$, $t \in [0, \infty)$.

Теорема 4. В условиях теорем 1, 2 равномерно по $\mathbf{u}$ ($\mathbf{u} \in \Omega$)

$$f(\mathbf{u}, t) \rightarrow M(\mathbf{u}) \quad \text{при} \quad t \rightarrow \infty.$$

Если молекулы взаимодействуют как упругие шары, то условие (5) равносильно неравенству $\kappa > 6$ и теоремы 1—4 равносильны соответствующим теоремам Карлемана (2). Приведем схему доказательства сформулированных теорем.

Доказательство теоремы 1 основано на использовании идей Карлемана и следующих лемм.

Лемма 1. Если $0 \leq f(\mathbf{u}, t) \leq a(1 + u^2)^{-\kappa/2}$, $\kappa > 5$, $\gamma \in [0, 1]$, $\varepsilon \in (0, 1)$, то

$$\Phi(\mathbf{u}, t) \leq \frac{2\pi \left[\sup_{\theta \in [0, \pi/2]} \beta_\gamma(\theta) \right] \int_{\Omega} f(\mathbf{u}_1, t) d\mathbf{u}_1}{(\kappa - 2)(1 + u^2)^{\kappa/2 - (1-\gamma)/2}} + \frac{k(\kappa) a^2}{(1 + u^2)^{\kappa/2}}, \\ Q(\mathbf{u}, t) \geq \left(2\pi \int_0^{\pi/2} \beta_\gamma(\theta) \cos \theta \sin \theta d\theta \right) \left\{ \varepsilon^{1-\gamma} |u|^{1-\gamma} \int_{\Omega} f(\mathbf{u}_1, t) d\mathbf{u}_1 - \right. \\ \left. - \left(\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \right)^{1-\gamma} \left[\int_{\Omega} (1 + u_1^2) f(\mathbf{u}_1, t) d\mathbf{u}_1 \right] \right\}.$$

Лемма 2. Пусть $f(\mathbf{u}, t)$ — непрерывное решение уравнения Больцмана, удовлетворяющее для некоторого положительного t_1 условию

$$0 \leq f(\mathbf{u}, t) \leq c(t_1)(1 + u^2)^{-\kappa/2} \quad \text{при} \quad t \in [0, t_1]. \quad (7)$$

Тогда $I(1 - \gamma) < C_1$, $I(\alpha) < C_2(1 + I(\alpha - 1 + \gamma))$,

$$I(\alpha) = \sup_{t \in [0, t_1]} \int_{\Omega} f(u_1, t) |u - u_1|^{-\alpha} du_1, \quad 0 < \alpha < 3,$$

где C_1, C_2 — постоянные, не зависящие от t_1 .

Лемма 1 позволяет построить решение уравнения (1), удовлетворяющее условию (7) на достаточно малом промежутке времени $[0, t_1]$. На основании леммы 2 доказывается, что всякое непрерывное решение, удовлетворяющее условию (7), удовлетворяет и условию (6). Поэтому построенное решение можно продолжить на любой конечный промежуток значений t . Теорема 2 доказывается почти так же, как соответствующая теорема Карлемана; то же можно сказать и о теореме 4, но в последнем случае существенно используется теорема 3. Однако доказательство аналога теоремы 3, по-видимому, было доведено Карлеманом до конца лишь для случая, когда начальное распределение зависит только от $|u - U|$ (см. (2), стр. 65). Поэтому остановимся на нем несколько подробнее. Обозначим через H класс функций $h(u, t)$, которые непрерывны по u в любом фиксированном шаре $|u| \leq R < \infty$ равномерно по t при $t \in (0, \infty)$. Ясно, что для доказательства теоремы 3 достаточно доказать, что $f(u, t) \in H$. Через C_i будем обозначать постоянные, зависящие только от начальных условий и γ . Можно доказать, что $Q(u, t) > C_3 > 0$. Используя это неравенство, уравнение (1) и теорему 1, получим

$$\sup_t |f(u, t) - f(v, t)| \leq C_4 \{ |f(u, 0) - f(v, 0)| + |Q(u, t) - Q(v, t)| + |\Phi(u, t) - \Phi(v, t)| \}.$$

Очевидно, что $f(u, 0) \in H$ и $Q(u, t) \in H$. Следовательно, доказательство теоремы 3 сводится к доказательству соотношения $\Phi(u, t) \in H$. Заменой переменных функция $\Phi(u, t)$ приводится к виду

$$\Phi(u, t) = \int_{\Omega} f(u_1, t) g(u, u_1) \varphi(u, u_1, t) du_1, \quad (8)$$

где

$$g(u, u_1) = |u - u_1|^{-(1+\gamma)} \beta(|u_z - u_{1z}| |u - u_1|^{-1}),$$

$$\beta(z) = \beta(\arccos z) |z|^{-\gamma},$$

$$\varphi(u, u_1, t) = \int_{E_{uu_1}} f(q, t) d\sigma(u, u_1),$$

$$E_{uu_1} = \{q: (q - u)(u_1 - u) = 0\},$$

$d\sigma(u, u_1)$ — элемент площади на плоскости E_{uu_1} . Пусть $D = \{u, u_1: |u_z - u_{1z}| > \delta_1, |u| \leq R_1, |u_1| \leq R_1\}$. Через $H(D)$ обозначим класс функций $h(u, u_1, t)$, которые непрерывны по u равномерно по t при $t \in [0, \infty)$, $(u, u_1) \in D$ и любых фиксированных положительных δ_1, R_1 . Нетрудно понять, что $\Phi(u, t) \in H$, если $\varphi(u, u_1, t) \in H(D)$. Пусть R_2 — некоторое фиксированное положительное число. Положим

$$q_x^{(i)} = -R_2 + \frac{i}{n} 2R_2, \quad q_y^{(i)} = -R_2 + \frac{i}{n} 2R_2, \quad i = 0, 1, \dots, n;$$

$$\Delta_{ik}(u) = \{q: q \in E_{uu_1}, q_x^{(i)} \leq q_x \leq q_x^{(i+1)}, q_y^{(k)} \leq q_y \leq q_y^{(k+1)}\},$$

$$\varphi_{ik}(u, u_1, t) = \int_{\Delta_{ik}(u)} f(q, t) d\sigma(u, u_1); \quad Q_{ik} = Q(q_{ik}, t),$$

$$q_{ik} = \left\{ q_x^{(i)}, q_y^{(k)}, u_z - (q_x^{(i)} - u_x) \frac{u_{1x} - u_x}{u_{1z} - u_z} - (q_y^{(k)} - u_y) \frac{u_{1y} - u_y}{u_{1z} - u_z} \right\}.$$

За счет выбора R_2 величину $|\varphi(u, u_1, t) - \sum_{i,k=1}^n \varphi_{ik}(u, u_1, t)|$ можно сделать сколь угодно малой равномерно по t . Поэтому достаточно доказать, что $\varphi_{ik}(u, u_1, t) \in H(D)$ при всех i, k .

Из уравнения (1) следует неравенство

$$|\varphi_{ik}(\mathbf{u}, \mathbf{u}_1, t) - \varphi_{ik}(\mathbf{v}, \mathbf{u}_1, t)| \leq C_5 \sum_{l=1}^4 R_{ik}^{(l)},$$

где

$$\begin{aligned} R_{ik}^{(1)} &= |\varphi_{ik}(\mathbf{u}, \mathbf{u}_1, 0) - \varphi_{ik}(\mathbf{v}, \mathbf{u}_1, 0)|, \\ R_{ik}^{(2)} &= \left| \int_{\Delta_{ik}(\mathbf{u})} f(\mathbf{q}, t) [Q_{ik} - Q(\mathbf{q}, t)] d\sigma(\mathbf{u}, \mathbf{u}_1) \right|, \\ R_{ik}^{(3)} &= \left| \int_{\Delta_{ik}(\mathbf{v})} f(\mathbf{q}, t) [Q(\mathbf{q}, t) - Q_{ik}] d\sigma(\mathbf{v}, \mathbf{u}_1) \right|, \\ R_{ik}^{(4)} &= \left| \int_{\Delta_{ik}(\mathbf{u})} \Phi(\mathbf{q}, t) d\sigma(\mathbf{u}, \mathbf{u}_1) - \int_{\Delta_{ik}(\mathbf{v})} \Phi(\mathbf{q}, t) d\sigma(\mathbf{v}, \mathbf{u}_1) \right|. \end{aligned}$$

Поскольку $Q(\mathbf{u}, t) \in H$, по любому положительному ε можно найти такие числа $n(R_2)$ и δ , не зависящие от t , что при всех $(\mathbf{u}, \mathbf{u}_1) \in D$ и t из $(0, \infty)$

$$\sum_{l=1}^3 R_{ik}^{(l)} < \varepsilon \quad (1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq n, n > n(R_2)),$$

если $|\mathbf{u} - \mathbf{v}| < \delta$. Поэтому достаточно доказать, что

$$\int_{\Delta_{ik}(\mathbf{u})} \Phi(\mathbf{q}, t) d\sigma(\mathbf{u}, \mathbf{u}_1) \in H(D). \quad (9)$$

Используя равенство (8), получим

$$\begin{aligned} & \int_{\Delta_{ik}(\mathbf{u})} \Phi(\mathbf{q}, t) d\sigma(\mathbf{u}, \mathbf{u}_1) = \\ &= \int_{\Delta_{ik}(\mathbf{u})} \left\{ \int_{\Omega} f(\mathbf{v}_1, t) g(\mathbf{q}, \mathbf{v}_1) \left[\int_{E_{\mathbf{q}\mathbf{v}_1}} f(\mathbf{p}, t) d\sigma(\mathbf{q}, \mathbf{v}_1) \right] d\mathbf{v}_1 \right\} d\sigma(\mathbf{u}, \mathbf{u}_1). \end{aligned} \quad (10)$$

Справедливость соотношения (9) доказывается путем перехода в правой части (10) от поверхностных интегралов к семикратному по переменным q_x, q_y, v_1, p_x, p_y и введения в последнем новых переменных q_x, v_1, p . Теорема доказана.

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова

Поступило
19 VI 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ T. Carleman, Acta Mathematica, 60 (1932). ² Т. Карлеман, Математические задачи кинетической теории газов, М., 1960. ³ H. Grad, Rarefied Gas Dynamics, I, N. Y.—London, 1963.